TETMAYER J. – INTEGRATION...

PARIS 1861

Wielmożnemu Doktorowi
Szujskiemu, Sekretarzowi
Jeneralnemu Akademii
Umiejętności w Krakowie, &c &c
w dowód szacunku
Autor
Tetmajer

INTÉGRATION

DES

FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES

PAR

J. TETMAYER DE PRZERWA.

PREMIER FASCICULE.

(La Préface paraîtra avec le dernier fascicule.)

PARIS
LIBRAIRIE CENTRALE DES SCIENCES
LEIBER, ÉDITEUR, RUE DE SEINE, 13.

1861

INTÉGRATION

DES

FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, 26, rue Racine.

INTÉGRATION

DES

FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES

PAR

J. TETMAYER DE PRZERWA.

PARIS

LIBRAIRIE CENTRALE DES SCIENCES

LEIBER, ÉDITEUR, RUE DE SEINE, 13.

1861

INTÉGRATION

DES

FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES.

SECTION PREMIÈRE.

Fonctions rationnelles entières.

§ 1. *Intégrales élémentaires.*

1. La différentiation donne

$$d \sin z = \cos z dz, \quad d \cos z = - \sin z dz,$$
$$d \sin^m z = m \sin^{m-1} z \cos z dz,$$
$$d \cos^m z = - m \cos^{m-1} z \sin z dz;$$

donc

$$\int \cos z dz = \sin z + C, \quad \int \sin z dz = - \cos z + C,$$

$$\int \sin^m z \cos z dz = \frac{\sin^{m+1} z}{m+1} + C,$$

$$\int \cos^m z \sin z dz = - \frac{\cos^{m+1} z}{m+1} + C.$$

§ 2. *Intégration de la fonction*

Rdz.

2. Soit R une fonction rationnelle et entière de différents sinus et cosinus dépendant de l'arc z.

La fonction R peut toujours être mise sous la forme

$$a + b \sin^{\alpha} z + c \cos^{\beta} z + d \sin^{\gamma} z \cos^{\delta} z + \ldots$$

$a, b, c, d, \ldots.$ désignant des constantes.

En effet, si cette fonction contient des sinus ou cosinus comme $\sin(a+pz)$, $\cos(b+qz) \ldots$, on les exprimera d'abord en $\sin pz$, $\cos pz$, $\sin qz, \ldots$

Si $p, q \ldots$ sont des fractions telles que $\frac{e}{f}, \frac{g}{h}, \ldots$ on fera $z = fhx$ et l'on changera ainsi $\sin pz$, $\sin qz, \ldots$ en $\sin ehz$, $\sin gfz, \ldots$ où eh, gf seront des nombres entiers.

Et si $p, q \ldots$ sont entiers ou que, par suite de la substitution ci-dessus, on ait $\sin ehz$, $\sin gfz, \ldots$ on écrira ces sinus et cosinus en fonctions de l'arc simple z. A cet effet, on peut se servir des formules suivantes :

$$\cos mz = \cos^{m} z - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} z \sin^{2} z + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} z \sin^{4} z - \ldots$$

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} z \sin^{3} z + \ldots.$$

qu'on obtient en développant le second membre de l'équation

$$\cos mz + \sqrt{-1} \sin mz = (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^{m}$$

et égalant de part et d'autre les parties réelles et les parties imaginaires.

Ces transformations et les opérations auxquelles elles donnent lieu étant effectuées, la fonction R prendra nécessairement la forme

$$a + b \sin^\alpha z + c \cos^\beta z + d \sin^\gamma z \cos^\delta z + \ldots$$

D'où il suit que, si R est une fonction rationnelle et entière de différents sinus et cosinus dépendant de l'arc z, l'intégrale

$$\int R dz$$

peut toujours être établie au moyen des suivantes :

$$\int dz, \quad \int \cos^m z dz, \quad \int \sin^m z dz, \quad \int \sin^m z \cos^n z dz.$$

Nous allons donc intégrer ces quatre expressions.

I

On a

$$\int dz = z + C$$

II

Comme

$$\int \cos^m z dz = \int \cos^{m-2} z (1 - \sin^2 z) dz$$
$$= -\int \cos^{m-2} z \sin^2 z dz + \int \cos^{m-2} z dz,$$

en intégrant par parties, on obtient

$$\int \cos^m z dz = \frac{\cos^{m-1} z \sin z}{m-1} - \frac{1}{m-1} \int \cos^m z dz + \int \cos^{m-2} z dz;$$

d'où l'on tire

$$\int \cos^m z dz = \frac{\cos^{m-1} z \sin z}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} z dz;$$

et cette formule appliquée à elle-même un nombre suffisant de fois, donne

$$\int \cos^m z dz = \frac{\sin z}{m}\left(\cos^{m-1} z + \frac{m-1}{m-2}\cos^{m-3} z + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\cos^{m-5} z \right.$$
$$\left. + \ldots \frac{3.5\ldots(m-3)(m-1)}{2.4\ldots(m-4)(m-2)}\cos z\right)$$
$$+ \frac{1.3\ldots(m-3)(m-1)}{2.4\ldots(m-2)m} z + C,$$

ou

$$\int \cos^m z dz = \frac{\sin z}{m}\left(\cos^{m-1} z + \frac{m-1}{m-2}\cos^{m-3} z + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \frac{2.4\ldots(m-3)(m-1)}{1.3\ldots(m-4)(m-2)}\right) + C$$

suivant que m est pair ou impair.

III

Lorsque, dans les deux dernières formules on remplace z par $z - \frac{\pi}{2}$, ce qui entraîne

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \sin z, \quad \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z,$$

elles fournissent les suivantes :

$$\int \sin^m z dz = -\frac{\cos z}{m}\left(\sin^{m-1} z + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} z + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5} z \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{3.5\ldots(m-3)(m-1)}{2.4\ldots(m-4)(m-2)}\sin z\right)$$
$$+ \frac{1.3\ldots(m-3)(m-1)}{2.4\ldots(m-2)m} z + C;$$

$$\int \sin^m z dz = -\frac{\cos z}{m}\left(\sin^{m-1} z + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} z + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{2.4\ldots(m-3)(m-1)}{1.3\ldots(m-4)(m-2)}\right) + C.$$

IV

Pour intégrer

$$\int \sin^m z \cos^n z dz,$$

on opère de manière à diminuer successivement les exposants de cette expression jusqu'à ce qu'on parvienne à l'une des intégrales établies ci-dessus.

Posons d'abord

$$\int \sin^m z \cos^n z dz = \int \cos^{n-1} z \sin^m z \cos z dz.$$

On en conclut

$$\int \sin^m z \cos^n z dz = \frac{\sin^{m+1} z \cos^{n-1} z}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} z \cos^{n-2} z dz,$$

puis, remplaçant $\sin^{m+2} z$ par $\sin^m z (1 - \cos^2 z)$,

$$\int \sin^m z \cos^n z dz = \frac{\sin^{m+1} z \cos^{n-1} z}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m z \cos^{n-2} z dz$$
$$- \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m z \cos^n z dz;$$

et cette équation résolue par rapport à l'intégrale proposée donne

$$\int \sin^m z \cos^n z dz = \frac{\sin^{m+1} z \cos^{n-1} z}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m z \cos^{n-2} z dz.$$

Quand on fait

$$\int \sin^m z \cos^n z dz = \int \sin^{m-1} z \cos^n z \sin z dz,$$

un calcul entièrement semblable conduit à

$$\int \sin^m z \cos^n z dz = -\frac{\cos^{n+1} z \sin^{m-1} z}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \cos^n z \sin^{m-2} z dz.$$

La première de ces deux formules réduit l'exposant n, et la seconde celui m.

3. Lorsque la différentielle qu'il s'agit d'intégrer offre un exposant impair, son intégrale peut être exprimée plus simplement. Car, puisque

$$\cos^{2k+1} z dz = (1 - \sin^2 z)^k \cos z dz = (\cos z - k \sin^2 z \cos z + \ldots \pm \sin^{2k} z \cos z) dz,$$

on aura

$$\int \cos^{2k+1} z dz = \sin z - \frac{k \sin^3 z}{3} + \ldots . \pm \frac{\sin^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{C}.$$

§ 3. *Autre moyen d'intégrer la fonction*

Rdz.

4. On évite les transformations indiquées ci-dessus en traitant, d'après sa forme particulière, chacune des différentielles que contient la fonction Rdz.

Car, on a évidemment

$$\int \sin(a \pm pz) dz = \frac{1}{p} \sin(a \pm pz) p dz = \pm \frac{\cos(a \pm pz)}{p} + \mathrm{C},$$

$$\int \cos(a \pm pz) dz = \frac{1}{p} \cos(a \pm pz) p dz = \mp \frac{\sin(a \pm pz)}{p} + \mathrm{C};$$

et, par conséquent, aux intégrales

$$\int \sin^m(a \pm pz) dz, \quad \int \cos^m(a \pm pz) dz, \quad \int \sin^m(a \pm pz) \cos^n(a \pm pz) dz,$$

les formules qui précèdent sont applicables immédiatement.

5. Par ces résultats on voit comment il faut opérer lorsque dans

$$\int \sin^m z dz, \quad \int \cos^m z dz,$$

on substitue aux puissances $\sin^m z$, $\cos^m z$, leurs expressions en sinus et cosinus des multiples de z.

Les formules qui donnent ces expressions, s'obtiennent le plus aisément quand, après avoir établi les quatre développements que fournissent les binomes $(a+b)^m$ et $(a-b)^m$, dans les suppositions successives $m=2k$, $m=2k+i$, on groupe les termes affectés de mêmes coefficients. Car, il suffit alors d'y faire

$$a=\cos z+\sqrt{-1}\sin z,\quad b=\cos z-\sqrt{-1}\sin z;$$

et ayant égard à ce que

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)^m=\cos mz\pm\sqrt{-1}\sin mz,$$
$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)=1,$$

on trouve pour $m=2k$,

$$\cos^m z=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\cos mz+m\cos(m-2)z+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\right),$$

$$\sin^m z=\frac{(-1)^k}{2^{m-1}}\left(\cos mz-\cos m(m-2)z+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z-\ldots\right.$$
$$\left.\pm\frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\right),$$

et pour $m=2k+1$,

$$\cos^m z=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\cos mz+m\cos(m-2)z+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z+\ldots.\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots k}\cos z\right),$$

$$\sin^m z=\frac{(-1)^k}{2^{m-1}}\left(\sin mz-m\sin(m-2)z+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)z-\ldots.\right.$$
$$\left.\pm\frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots k}\sin z\right);$$

où l'on doit s'arrêter dès qu'on parvient à un terme qui renferme un arc négatif.

6. On peut intégrer aussi un produit de la forme

$$\sin^n (p + qz) \cos (r + sz) \dots dz$$

sans avoir recours aux expressions en sinus et cosinus de l'arc simple z. Car les relations connues

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos (a - b) - \frac{1}{2} \cos (a + b),$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin (a + b) + \frac{1}{2} \sin (a - b),$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b),$$

jointes aux quatre formules qui précèdent, fournissent autant de moyens de convertir un tel produit en somme de sinus et cosinus d'arcs multiples.

Soit $n = 3$. On fera d'abord

$$\sin^3 (p + qz) = - \frac{1}{4} \sin (3p + 3qz) + \frac{3}{4} \sin (p + qz),$$

puis

$$\sin^3 (p + qz) \cos (r + sz) = \frac{1}{8} \Big(- \sin (3p + r + (3q + s)z)$$
$$- \sin (3p - r + (3q - s)z) + 3 \sin (p + r + (q + s)z)$$
$$+ 3 \sin (p - r + (q - s)z) \Big) ;$$

et ainsi de suite.

SECTION DEUXIÈME.

Fonctions rationnelles fractionnaires.

CHAPITRE PREMIER.

INTÉGRATION DES FRACTIONS DONT LES DÉNOMINATEURS SONT DES FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES MONÔMES DE L'ARC z.

§ 1. *Intégrales élémentaires.*

7. La différentiation donne

$$d\,\frac{1}{\sin^m z} = -\frac{m\cos z dz}{\sin^{m+1} z}, \quad d\,\frac{1}{\cos^m z} = \frac{m\sin z dz}{\cos^{m+1} z},$$

$$d\,l\sin z = \frac{\cos z dz}{\sin z}, \qquad d\,l\cos z = -\frac{\sin z dz}{\cos z};$$

donc

$$\int\frac{\cos z dz}{\sin^m z} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} z} + \mathrm{C}, \quad \int\frac{\sin z dz}{\cos^m z} = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} z} + \mathrm{C},$$

$$\int\cot z dz = l\sin z + \mathrm{C}, \qquad \int\operatorname{tang} z dz = -l\cos z + \mathrm{C}.$$

§ 2. *Intégration des différentielles*

$$\frac{Pdz}{\cos z}, \quad \frac{Pdz}{\sin z}, \quad \frac{Pdz}{\sin z \cos z}.$$

8. Supposons que P soit une fonction rationnelle et entière de différents sinus et cosinus dépendant de l'arc z, mais qu'elle ne contienne aucun sinus ni cosinus d'une fraction de z.

Conformément à ce qui a été établi ci-dessus, la fonction P peut toujours être mise sous la forme

$$a + b \sin^\alpha z + c \cos^\beta z + d \sin^\gamma z \cos^\delta z + \ldots..$$

En conséquence, les fractions

$$\frac{Pdz}{\cos z}, \quad \frac{Pdz}{\sin z}, \quad \frac{Pdz}{\sin z \cos z}$$

peuvent fournir les différentielles fractionnaires indiquées aux seconds membres des équations

$$\frac{Pdz}{\cos z} = \frac{adz}{\cos z} + \frac{b \sin^\alpha z dz}{\cos z} + \ldots..$$

$$\frac{Pdz}{\sin z} = \frac{adz}{\sin z} + \frac{c \cos^\beta z dz}{\sin z} + \ldots.$$

$$\frac{Pdz}{\sin z \cos z} = \frac{adz}{\sin z \cos z} + \ldots..$$

Les intégrales de ces cinq différentielles s'obtiennent comme il suit :

I

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z} = \int \left(\frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin z}{\cos z} \right) dz$$

$$= l \sin z - l \cos z + C;$$

donc

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z} = l \operatorname{tang} z + C.$$

II

$$\int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{dz}{2 \sin \frac{z}{z} \cos \frac{z}{z}};$$

donc

$$\int \frac{dz}{\sin z} = l \operatorname{tang} \frac{z}{2} + C.$$

III

$$\int \frac{dz}{\cos z} = \int \frac{dz}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)},$$

donc

$$\int \frac{dz}{\cos z} = l \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) + C.$$

IV

$$\int \frac{\sin^{\alpha} z dz}{\cos z} = - \int \sin^{\alpha-2} z \cos z dz + \int \frac{\sin^{\alpha-2} z dz}{\cos z}$$

$$= - \frac{\sin^{\alpha-1} z}{\alpha - 1} + \int \frac{\sin^{\alpha-2} z dz}{\cos z};$$

et par suite on aura

$$\int \frac{\sin^{\alpha} z dz}{\cos z} = - \frac{\sin^{\alpha-1} z}{\alpha - 1} - \frac{\sin^{\alpha-3} z}{\alpha - 3} - \ldots - \sin z + l \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) + C,$$

si α est pair, ou

$$\int \frac{\sin^\alpha z dz}{\cos z} = -\frac{\sin^{\alpha-1} z}{\alpha-1} - \frac{\sin^{\alpha-3} z}{\alpha-3} - \dots - \frac{\sin^2 z}{2} - l\cos z + C,$$

si α est impair.

V

On obtient pareillement

$$\int \frac{\cos^\beta z dz}{\sin z} = \frac{\cos^{\beta-1} z}{\beta-1} + \int \frac{\cos^{\beta-2} z dz}{\sin z};$$

ce qui donne pour $\beta = 2k$,

$$\int \frac{\cos^\beta z dz}{\sin z} = \frac{\cos^{\beta-1} z}{\beta-1} + \frac{\cos^{\beta-3} z}{\beta-3} + \dots + \cos z + l \operatorname{tang} \frac{z}{2} + C,$$

et pour $\beta = 2k+1$,

$$\int \frac{\cos^\beta z}{\sin z} = \frac{\cos^{\beta-1} z}{\beta-1} + \frac{\cos^{\beta-3} z}{\beta-3} + \dots + \frac{\cos^2 z}{2} + l\sin z + C.$$

§ 3. *Intégration des différentielles*

$$\frac{Pdz}{\cos^m z}, \quad \frac{Pdz}{\sin^m z}, \quad \frac{Pdz}{\sin^m z \cos^n z}.$$

9. En supposant toujours

$$P = a + b\sin^\alpha z + c\cos^\beta z + d\sin^\gamma z\cos^\delta z + \dots.$$

on trouve qu'abstraction faite des différentielles intégrées dans ce qui précède, les fractions

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\cos^m z}, \quad \frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m z}, \quad \frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m z \cos^n z}$$

peuvent offrir les suivantes :

1° $$\frac{dz}{\cos^m z}, \quad \frac{dz}{\sin^m z}, \quad \frac{dz}{\sin^m z \cos^n z};$$

2° $$\operatorname{tang}^m z dz, \quad \operatorname{cotang}^m z dz;$$

3° $$\frac{\sin^\alpha z dz}{\cos^m z}, \quad \frac{\cos^\beta z dz}{\sin^m z}.$$

Ces différentielles donnent, par conséquent, lieu à trois espèces d'intégrations distinctes.

I

En posant

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{\cos^m z} &= \int\frac{\sin z dz}{\cos^m z \sin z}\\ &= \int\frac{\sin z}{\cos^{m-1} z}\left(\frac{\sin z}{\cos z}+\frac{\cos z}{\sin z}\right)dz\\ &= \int\frac{\sin^2 z dz}{\cos^m z}+\int\frac{dz}{\cos^{m-2} z},\end{aligned}$$

et intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{\cos^m z} = \frac{\sin z}{(m-1)\cos^{m-1} z} - \frac{1}{m-1}\int\frac{dz}{\cos^{m-2} z}\\ + \int\frac{dz}{\cos^{m-2} z},\end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$\int\frac{dz}{\cos^m z} = \frac{\sin z}{(m-1)\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dz}{\cos^{m-2} z}.$$

Cette formule donne

$$\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{\sin z}{m-1}\left(\text{séc}^{m-1}z + \frac{m-2}{m-3}\,\text{séc}^{m-3}z + \ldots + \frac{2.4\ldots(m-2)}{1.3\ldots(m-3)}\,\text{séc}\,z\right) + C,$$

ou

$$\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{\sin z}{m-1}\left(\text{séc}^{m-1}z + \frac{m-2}{m-3}\,\text{séc}^{m-3}z + \ldots + \frac{3.5\ldots(m-2)}{2.4\ldots(m-3)}\,\text{séc}^2 z\right)$$
$$+ \frac{1.3\ldots(m-2)}{2.4\ldots(m-1)}\, l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) + C,$$

suivant qu'on suppose m pair ou impair; et lorsque, dans ces résultats, on change z en $z - \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\int \frac{dz}{\sin^m z} = -\frac{\cos z}{m-1}\left(\text{coséc}^{m-1}z + \frac{m-2}{m-3}\,\text{coséc}^{m-3}z + \ldots + \frac{2.4\ldots(m-2)}{1.3\ldots(m-3)}\,\text{coséc}\,z\right) + C$$

$$\int \frac{dz}{\sin^m z} = -\frac{\cos z}{(m-1)}\left(\text{coséc}^{m-1}z + \frac{m-2}{m-3}\,\text{coséc}^{m-3}z + \ldots + \frac{3.5\ldots(m-2)}{2.4\ldots(m-3)}\,\text{coséc}^2 z\right)$$
$$+ \frac{1.3\ldots(m-2)}{2.4\ldots(m-1)}\, l\,\text{tang}\,\frac{z}{2} + C.$$

Maintenant, comme

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^n z} = \int \frac{1}{\sin^{m-1} z \cos^{n-1} z}\left(\frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin z}{\cos z}\right) dz$$
$$= \int \frac{\cos z\, dz}{\sin^m z \cos^{n-1} z} + \int \frac{dz}{\sin^{m-2} z \cos^n z},$$

on trouve

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^n z} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} z \cos^{n-1} z}$$
$$+ \frac{n-1}{m-1}\int \frac{dz}{\sin^{m-2} z \cos^n z} + \int \frac{dz}{\sin^{m-2} z \cos^n z},$$

et, assemblant,

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^n z} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} z \cos^{n-1} z} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dz}{\sin^{m-2} z \cos^n z}.$$

Pareillement, quand on fait

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^n z} = \int \frac{1}{\sin^{m-1} z \cos^{n-1} z}\left(\frac{\sin z}{\cos z} + \frac{\cos z}{\sin z}\right) dz$$
$$= \int \frac{\sin z dz}{\sin^{m-1} z \cos^n z} + \int \frac{dz}{\sin^m z \cos^{n-2} z},$$

on parvient à la formule

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^n z} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} z \sin^{m-1} z} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dz}{\cos^{n-2} z \sin^m z}.$$

Lorsque m est impair, la première de ces formules conduit à

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos^n z};$$

et, par la seconde, on ramène cette intégrale à l'une des suivantes :

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z}, \quad \int \frac{dz}{\sin z}.$$

II

Pour les tangentes et cotangentes il vient

$$\int \operatorname{tang}^m z dz = \int \sin^{m-1} z \frac{\sin z dz}{\cos^m z}$$
$$= \frac{\sin^{m-1} z}{(m-1)\cos^{m-1} z} - \int \frac{\sin^{m-2} z dz}{\cos^{m-2} z}$$
$$= \frac{\operatorname{tang}^{m-1} z}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} z dz;$$

$$\int \cot^m z dz = \int \cos^{m-1} z \frac{\cos z dz}{\sin^m z}$$

$$= -\frac{\cos^{m-1} z}{(m-1)\sin^{m-1} z} - \int \frac{\cos^{m-2} z dz}{\sin^{m-2} z}$$

$$= -\frac{\cot^{m-1} z}{m-1} - \int \cot^{m-2} z dz.$$

D'où l'on conclut, en supposant successivement pair et impair le nombre m,

$$\int \text{tang}^m z dz = \frac{\text{tang}^{m-1} z}{m-1} - \frac{\text{tang}^{m-3} z}{m-3} + \ldots\ldots \pm \text{tang}\, z \mp z + C,$$

$$\int \text{tang}^m z dz = \frac{\text{tang}^{m-1} z}{m-1} - \frac{\text{tang}^{m-3} z}{m-3} + \ldots\ldots \pm \frac{\text{tang}^2 z}{2} \pm l \cos z + C,$$

$$\int \cot^m z dz = -\frac{\cot^{m-1} z}{m-1} + \frac{\cot^{m-3} z}{m-3} - \ldots\ldots \mp \cot z \mp z + C,$$

$$\int \cot^m z dz = -\frac{\cot^{m-1} z}{m-1} + \frac{\cot^{m-3} z}{m-3} - \ldots\ldots \mp \frac{\cot^2 z}{2} \mp l \sin z + C.$$

III

Les formules qui ramènent

$$\int \frac{\sin^\alpha z dz}{\cos^m z}, \qquad \int \frac{\cos^\beta z dz}{\sin^m z}$$

à des intégrales traitées ci-dessus, s'obtiennent comme il suit :

$$\int \frac{\sin^\alpha z dz}{\cos^m z} = \int \sin^{\alpha-1} z \frac{\sin z dz}{\cos^m z}$$

$$= \frac{\sin^{\alpha-1} z}{(m-1)\cos^{m-1} z} - \frac{\alpha-1}{m-1} \int \frac{\sin^{\alpha-2} z dz}{\cos^{m-2} z},$$

$$\int \frac{\cos^\beta z dz}{\sin^m z} = \int \cos^{\beta-1} z \frac{\cos z dz}{\sin^m z}$$

$$= -\frac{\cos^{\beta-1} z}{(m-1)\sin^{m-1} z} - \frac{\beta-1}{m-1} \int \frac{\cos^{\beta-2} z dz}{\sin^{m-2} z}.$$

10. Ce qui précède offre des moyens suffisants pour intégrer les fractions que nous venons de considérer. Nous y ajouterons cependant de nouvelles expressions des intégrales

$$\int \frac{dz}{\sin^m z}, \quad \int \frac{dz}{\cos^m z},$$

expressions auxquelles conduit l'intégration des tangentes et cotangentes.

Pour cela nous posons d'abord

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^m z} = \int \left(\frac{\sin z}{\cos z} + \frac{\cos z}{\sin z}\right)^m dz$$

$$= \int (\operatorname{tang} z + \cot z)^m dz.$$

En supposant $m = 2k$, on aura évidemment

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^m z}$$

$$= \int \Big(\operatorname{tang}^m z + m \operatorname{tang}^{m-2} z + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)} \operatorname{tang}^2 z + \frac{m(m-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)} \cot^2 z + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ m \cot^{m-2} z + \cot^m z \Big) dz.$$

Intégrons maintenant. Il vient

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^m z}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}^{m-1} z}{m-1} - \frac{\operatorname{tang}^{m-3} z}{m-3} + \frac{\operatorname{tang}^{m-5} z}{m-5} - \ldots\ldots \pm \operatorname{tang} z \mp z$$

$$+ m \frac{\operatorname{tang}^{m-3} z}{m-3} - m \frac{\operatorname{tang}^{m-5} z}{m-5} + \ldots\ldots \mp m \operatorname{tang} z \pm mz$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{\operatorname{tang}^{m-5} z}{m-5} - \ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{tang} z \mp \frac{m(m-1)}{1.2} z$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)} \operatorname{tang} z - \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)} z$$

$$+ \frac{m(m+1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k} z$$

$$- \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)} \cot z - \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)} z$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{\cot^{m-5} z}{m-5} + \ldots\ldots \mp \frac{m(m-1)}{1.2} \cot z \mp \frac{m(m-1)}{1.2} z$$

$$- m \frac{\cot^{m-3} z}{m-3} + m \frac{\cot^{m-5} z}{m-5} - \ldots\ldots \pm m \cot z \pm mz$$

$$- \frac{\cot^{m-1} z}{m-1} + \frac{\cot^{m-3} z}{m-3} - \frac{\cot^{m-5} z}{m-5} + \ldots\ldots \mp \cot z \mp z$$

$$+ C.$$

Or, en groupant, on trouve généralement

$$\left(\pm 1 \mp m \pm \frac{m(m-1)}{1.2} \mp \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}\right) \frac{\operatorname{tang}^{m-2p+1} z - \cot^{m-2p+1} z}{m-2p+1}$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots(p-1)} \frac{\operatorname{tang}^{m-2p+1} z - \cot^{m-2p+1} z}{m-2p+1};$$

puis

$$2\left(\mp 1 \pm m \mp \frac{m(m-1)}{1.2} \pm \ldots\ldots - \frac{m(m-1)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)}\right) z$$

$$= - \frac{2(m-1)(m-2)\ldots\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)} z$$

$$= - \frac{m(m-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k} z,$$

de sorte que cette dernière somme détruit l'intégrale que donne le terme du milieu de la différentielle.

Donc

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^m z} = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} z - \cot^{m-1} z}{m-1} + (m-1)\frac{\operatorname{tang}^{m-3} z - \cot^{m-3} z}{m-3}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.3}\frac{\operatorname{tang}^{m-5} z - \cot^{m-5} z}{m-5} + \ldots..$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}(\operatorname{tang} z - \cot z) + C,$$

si $m = 2k$. Quand $m = 2k + 1$ le dernier groupe donne

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}(l \sin z - l \cos z);$$

et par suite on a

$$\int \frac{dz}{\sin^m z \cos^m z} = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} z - \cot^{m-1} z}{m-1} + (m-1)\frac{\operatorname{tang}^{m-3} z - \cot^{m-3} z}{m-3} + \ldots..$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)}\frac{\operatorname{tang}^2 z - \cot^2 z}{2}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k} l \operatorname{tang} z + C.$$

Donc, puisque

$$\int \frac{dz}{\sin^m z} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{dz}{2 \sin^m \frac{z}{2} \cos^m \frac{z}{2}},$$

$$\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{dz}{2 \cos^m \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) \sin^m \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)},$$

des deux formules qui précèdent, résultent les suivantes :

1°

$$\int\frac{dz}{\sin^m z}=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{\tang^{m-1}\frac{z}{2}-\cot^{m-1}\frac{z}{2}}{m-1}+(m-1)\frac{\tang^{m-3}\frac{z}{2}-\cot^{m-3}\frac{z}{2}}{m-3}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\left(\tang\frac{z}{2}-\cot\frac{z}{2}\right)\right)+C,$$

$$\int\frac{dz}{\sin^m z}=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{\tang^{m-1}\frac{z}{2}-\cot^{m-1}\frac{z}{2}}{m-1}+\ldots+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)}\frac{\tang^2\frac{z}{2}-\cot^2\frac{z}{2}}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\,l\tang\frac{z}{2}\right)+C,$$

2°

$$\int\frac{dz}{\cos^m z}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{\tang^{m-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)-\cot^{m-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)}{m-1}+(m-1)\frac{\tang^{m-3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)-\cot^{m-3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)}{m-3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\left[\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)-\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right]\right]+C,$$

$$\int\frac{dz}{\cos^m z}=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{\tang^{m-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)-\cot^{m-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)}{m-1}+\ldots\ldots\right.$$

$$+\frac{(m-1)(m-2\ldots(k+2)}{1.2\ldots(k-1)}\frac{\tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)-\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)}{2}$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\,l\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right]+C,$$

dont la première de chaque couple répond à $m=2k$, et la seconde à $m=2k+1$.

Les coefficients sont ici plus simples que dans les formules données plus haut pour la détermination de ces intégrales, et ils offrent l'avantage de procéder comme dans les puissances entières du binôme.

Exemple :

$$\int \frac{dz}{\sin^9 z} = \frac{1}{2^8}\left(\frac{\tang^8 \frac{z}{2} - \cot^8 \frac{z}{2}}{8} + 8\,\frac{\tang^6 \frac{z}{2} - \cot^6 \frac{z}{2}}{6} + 28\,\frac{\tang^4 \frac{z}{2} - \cot^4 \frac{z}{2}}{4}\right.$$

$$\left. + 56\,\frac{\tang^2 \frac{z}{2} - \cot^2 \frac{z}{2}}{2} + 70\, l \tang \frac{z}{2}\right) + C;$$

et la formule connue donne

$$\int \frac{dz}{\sin^9 z} = -\frac{\cos z}{8}\left(\operatorname{coséc}^8 z + \frac{7}{6}\operatorname{coséc}^6 z + \frac{35}{24}\operatorname{coséc}^4 z + \frac{105}{48}\operatorname{coséc}^2 z\right)$$

$$+ \frac{105}{384}\, l \tang \frac{z}{2} + C.$$

§ 4. *Transformations qui conduisent aux intégrations ci-dessus.*

11. On peut écrire

$$\frac{P dz}{\sin^m 2z}$$

comme il suit

$$\frac{P dz}{2^m \sin^m z \cos^m z};$$

et, si Q est une fonction rationnelle et entière qui contient $\sin \frac{z}{2}$ ou $\cos \frac{z}{2}$, en faisant $z = 2x$, on changera

$$\frac{Q dz}{\sin^m z}$$

en

$$\frac{P dx}{2^{m-1} \sin^m x \cos^m x}.$$

Mais il importe essentiellement d'observer que les différentielles

$$\frac{Pdz}{\sin^m \frac{z}{k}}, \quad \frac{Pdz}{\cos^m \frac{z}{k}}, \quad \frac{Pdz}{\sin^m \frac{z}{k} \cos^n \frac{z}{k}}$$

sont intégrables par les formules qui précèdent lorsque k est un nombre entier. Car, quand on remplace z par kx, elles deviennent

$$\frac{Pkdx}{\sin^m x}, \quad \frac{Pkdx}{\cos^m x}, \quad \frac{Pkdx}{\sin^m x \cos^n x};$$

et cette substitution n'introduit dans P aucun sinus ni cosinus dépendant d'une fraction de x. Ainsi, quand on fait $z = 3x$, il vient

$$\int \frac{\cos z dx}{\sin \frac{z}{3}} = 12 \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x} - 9 \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$
$$= 6 \cos^2 x + 3 l \sin x + C;$$

donc

$$\int \frac{\cos z dz}{\sin \frac{z}{3}} = 6 \cos^2 \frac{z}{3} + 3\, l \sin \frac{z}{3} + C.$$

CHAPITRE DEUXIÈME.

INTÉGRATION DES FRACTIONS DONT LES DÉNOMINATEURS SONT DES FONCTIONS GONIOMÉTRIQUES MONÔMES D'ARCS TELS QUE $a \pm z$.

§ 1. *Intégration des différentielles*

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m(a \pm z)}, \quad \frac{\mathrm{P}dz}{\cos^m(a \pm z)},$$

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m(a \pm z)}, \quad \frac{\mathrm{P}dz}{\cos^m(a \pm z)}, \quad \frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m(a \pm z)\cos^n(a \pm z)}.$$

12. Toutes les fois que la fonction P ne renfermera pas de sinus ni de cosinus d'un arc autre que celui $a \pm z$ auquel appartient le dénominateur de la fraction à intégrer, on effectuera l'opération par les formules établies précédemment.

Dans tous les autres cas, on fera d'abord disparaître les sinus ou cosinus des multiples de z qui pourraient se trouver dans P ; et l'on y rapportera ensuite tous les sinus et cosinus à l'arc $a \pm z$.

Exemple :

$$\int \frac{[\sin 2z + \cos^2(k+z)]\,dz}{\cos^3(a+z)} = \int \frac{[2\sin z \cos z + \cos^2(k+z)]\,dz}{\cos^3(a+z)}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(a+z-a)\\ &= \sin(a+z)\cos a - \cos(a+z)\sin a,\\ \cos z &= \cos(a+z)\cos a + \sin(a+z)\sin a,\\ \cos(k+z) &= \cos(k-a)\cos(a+z) - \sin(k-a)\sin(a+z);\end{aligned}$$

et effectuant les substitutions, on trouve

$$\begin{aligned}\int\frac{[\sin 2z+\cos^2(k+z)]dz}{\cos^3(a+z)} &= [\cos^2(k-a)-\sin 2a]\int\frac{dz}{\cos(a+z)}\\ &+ [2\cos 2a - \sin(2k-2a)]\int\frac{\sin(a+z)dz}{\cos^2(a+z)}\\ &+ [\sin^2(k-a)+\sin 2a]\int\frac{\sin^2(a+z)dz}{\cos^3(a+z)}.\end{aligned}$$

§ 2. *Intégration de la différentielle*

$$\frac{Pdz}{\sin(a+z)\cos(b-z)\cos(z-c)\ldots}$$

13. Il est évident que, si l'on parvient à décomposer la fraction

$$\frac{1}{\sin(a+z)\cos(b-z)\cos(z-c)\ldots}$$

en fractions partielles ayant pour dénominateurs respectifs les facteurs du produit $\sin(a+z)\cos(b-z)\ldots$ quelles que soient d'ailleurs les constantes dont ils puissent s'y trouver affectés, on déterminera

$$\int\frac{Pdz}{\sin(a+z)\cos(b-z)\cos(z-c)\ldots}$$

au moyen d'intégrales telles que

$$\int\frac{Pdz}{\sin(a+z)},\quad \int\frac{Pdz}{\cos(b-z)},\quad \ldots$$

que nous savons établir.

Les décompositions élémentaires des fractions que nous considérons s'obtiennent comme il suit :

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)}=\frac{\sin[b+z-(a+z)]}{\sin(b-a)\sin(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\sin(b+z)\cos(a+z)-\cos(b+z)\sin(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(b+z)},$$

$$\frac{1}{\sin(a+z)\cos(b+z)}=\frac{\cos[b+z-(a+z)]}{\cos(b-a)\sin(a+z)\cos(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\cos(b-a)\sin(a+z)}+\frac{\sin(b+z)}{\cos(a-b)\cos(b+z)},$$

$$\frac{1}{\cos(a+z)\cos(b+z)}=\frac{\sin[a+z-(b+z)]}{\sin(a-b)\cos(a+z)\cos(b+z)}$$
$$=\frac{\sin(a+z)}{\sin(a-b)\cos(a+z)}+\frac{\sin(b+z)}{\sin(b-a)\cos(b+z)};$$

et ainsi des autres. Il importe de remarquer que ces résultats subsistent lorsqu'on change z en $-z$, et qu'il en sera par conséquent de même de tous ceux qui en dérivent.

Nous allons maintenant chercher à établir des formules applicables à la décomposition des fractions de ce genre dont les dénominateurs offrent plus de deux facteurs.

14. Supposons que le dénominateur de la fraction

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots}$$

soit un produit de n sinus.

On trouve

1°
$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)}=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(b+z)};$$

2°

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)\sin(c+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(b+z)\sin(c+z)},$$

et, décomposant ces deux fractions,

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{\cos^2(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(a+z)\cos(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}$$
$$+\frac{\cos^2(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos(b+z)\cos(c+z)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)}.$$

Maintenant, quand on rapporte $\cos(a+z)$, $\cos(b+z)$ à l'arc $c+z$, il vient

$$\frac{\cos(a+z)\cos(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}=\frac{\cos(a-c)\cos^2(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}-\frac{\cos(c+z)}{\sin(b-a)},$$
$$\frac{\cos(b+z)\cos(c+z)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)}=\frac{\cos(b-c)\cos^2(c+z)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)}-\frac{\cos(c+z)}{\sin(a-b)}.$$

Or

$$\frac{\cos(c+z)}{\sin(b-a)}+\frac{\cos(c+z)}{\sin(a-b)}=0;$$

et, en vertu de la décomposition précédente, on a

$$\frac{\cos(a-c)}{\sin(b-a)\sin(a-c)}+\frac{\cos(b-c)}{\sin(a-b)\sin(b-c)}=\frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)}.$$

Donc

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}=\frac{\cos^2(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)}$$
$$+\frac{\cos^2(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos^2(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c+z)}.$$

3° On peut donc poser

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)}=\frac{\cos^2(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)\sin(d+z)}$$
$$+\frac{\cos^2(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)\sin(d+z)}+\frac{\cos^2(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c+z)\sin(d+z)};$$

ce qui conduit d'abord à

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)}$$
$$=\frac{\cos^3(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos^2(a+z)\cos(d+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a-d)\sin(d+z)}$$
$$+\frac{\cos^3(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos^2(b+z)\cos(d+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b-d)\sin(d+z)}$$
$$+\frac{\cos^3(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c+z)}+\frac{\cos^2(c+z)\cos(d+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c-d)\sin(d+z)}.$$

Or, les transformations de $\cos^2(a+z)$, $\cos^2(b+z)$, $\cos^2(c+z)$ effectuées comme ci-dessus, donnent

$$\frac{\cos^2(a+z)\cos(d+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a-d)\sin(d+z)}$$
$$=\frac{\cos^2(a-d)\cos^3(d+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a-d)\sin(d+z)}-\frac{2\cos(a-d)\cos^2(d+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)}+\frac{\sin(a-d)\sin(d+z)\cos(d+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)},$$

$$\frac{\cos^2(b+z)\cos(d+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b-d)\sin(d+z)}$$
$$=\frac{\cos^2(b-d)\cos^3(d+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b-d)\sin(d+z)}-\frac{2\cos(b-d)\cos^2(d+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)}+\frac{\sin(b-d)\sin(d+z)\cos(d+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)},$$

$$\frac{\cos^2(c+z)\cos(d+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c-d)\sin(d+z)}$$
$$=\frac{\cos^2(c-d)\cos^3(d+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c-d)\sin(d+z)}-\frac{2\cos(c-d)\cos^2(d+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)}+\frac{\sin(c-d)\sin(d+z)\cos(d+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)}.$$

Mais nous venons de voir que

$$\frac{\cos^2(a-d)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a-d)} + \frac{\cos^2(b-d)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b-d)}$$
$$+ \frac{\cos^2(c-d)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c-d)} = \frac{1}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)};$$

et, pour les coefficients respectifs de $\cos^2(d+z)$ et $\sin(d+z)\cos(d+z)$, on trouve en assemblant

$$\frac{2(\cos(a-d)\sin(c-b)+\cos(b-d)\sin(a-c)+\cos(c-d)\sin(b-a))}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(c-b)} =$$

$$\frac{\begin{array}{l}\sin(c-b+a-d)+\sin(c-b-a+d)+\sin(a-c+b-d)+\sin(a-c-b+d)\\ +\sin(b-a+c-d)+\sin(b-a-c+d)\end{array}}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(c-b)}$$
$$=0,$$

et de même

$$\frac{\sin(a-d)\sin(c-b)+\sin(b-d)\sin(a-c)+\sin(c-d)\sin(b-a)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(c-b)} =$$

$$\frac{\begin{array}{l}\frac{1}{2}[\cos(a-d-c+b)-\cos(a-d+c-b)+\cos(b-d-a+c)-\cos(b-d+a-c)\\ +\cos(c-d-b+a)-\cos(c-d+b-a)]\end{array}}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(c-b)}$$
$$=0.$$

Donc

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)}$$
$$=\frac{\cos^3(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a+z)} + \frac{\cos^3(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b+z)}$$
$$+\frac{\cos^3(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c+z)} + \frac{\cos^3(d+z)}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(d+z)}.$$

On s'assure ainsi que, si les facteurs du produit

$$\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots$$

sont au nombre de n, on aura

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots}$$

$$= \frac{\cos^{n-1}(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\ldots\sin(a+z)} + \frac{\cos^{n-1}(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\ldots\sin(b+z)}$$

$$+ \frac{\cos^{n-1}(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\ldots\sin(c-z)} + \ldots\ldots$$

Telle est la formule générale qui décompose la fraction

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots}$$

quel que soit le nombre de facteurs qui forment son dénominateur. Elle est applicable à toute fraction dont le dénominateur est un produit de sinus ou cosinus tous distincts dépendant d'arcs tels que $a \pm z$. Car, au moyen des identités

$$\cos(a+z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+a+z\right),$$

$$\cos(a-z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-a+z\right),$$

$$\sin(a-z) = \sin(\pi-a+z),$$

une telle fraction peut toujours être mise sous la forme

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots}$$

Exemple :

$$\frac{1}{\sin(a+z)\cos(b-z)\sin(z-c)} = \frac{1}{\sin(a+z)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b+z\right)\sin(z-c)}$$

$$= \frac{\cos^2(a+z)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-b-a\right)\sin(-c-a)\sin(a+z)}$$

$$+ \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-b+z\right)}{\sin\left(a-\frac{\pi}{2}+b\right)\sin\left(-c-\frac{\pi}{2}+b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b+z\right)}$$

$$+ \frac{\cos^2(z-c)}{\sin(a+c)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b+c\right)\sin(z-c)};$$

donc

$$\frac{1}{\sin(a+z)\cos(b-z)\sin(z-c)} = \frac{\cos^2(a+z)}{\cos(a+b)\sin(a+c)\sin(a+z)}$$

$$+ \frac{\sin^2(b-z)}{\cos(a+b)\cos(b-c)\cos(b-z)} + \frac{\cos^2(z-c)}{\sin(a+c)\cos(b-c)\sin(z-c)}.$$

15. Quand on traite conformément à sa nature chacun des deux cas qu'offre la fraction

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\ldots\ldots},$$

selon que son dénominateur est un produit d'un nombre pair ou impair de facteurs, on obtient deux formules distinctes remarquables par leur extrême simplicité. Et l'on y parvient plus facilement qu'à la formule générale établie ci-dessus. En effet, on a

1°

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)} = \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)} + \frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(b+z)};$$

2°

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)\sin(c+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(b+z)\sin(c+z)},$$

et par suite

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{\cos^2(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(a+z)\cos(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}$$
$$+\frac{\cos^2(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos(b+z)\cos(c+z)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)}.$$

Maintenant, au moyen de l'identité $\cos^2(a+z)=1-\sin^2(a+z)$, on peut faire

$$\frac{\cos^2(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(a+z)\cos(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)}+\frac{\sin(a+z)\sin(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}$$
$$+\frac{\cos(a+z)\cos(c+z)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(a-c)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)},$$

et pareillement

$$\frac{\cos^2(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos(b+z)\cos(c+z)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)}$$
$$=\frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos(b-c)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)} + \frac{\cos(a-c)}{\sin(b-a)\sin(a-c)\sin(c+z)}$$

$$+ \frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)} + \frac{\cos(b-c)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c+z)};$$

mais de la décomposition précédente, il résulte que

$$\frac{\cos(a-c)}{\sin(b-a)\sin(a-c)} + \frac{\cos(b-c)}{\sin(a-b)\sin(b-c)} = \frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)};$$

donc

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)}$$

$$= \frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)} + \frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)}$$

$$+ \frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c+z)}.$$

3° Il s'ensuit

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)} = \frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a+z)\sin(d+z)}$$

$$+ \frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b+z)\sin(d+z)} + \frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c+z)\sin(d+z)};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a+z)} + \frac{\cos(d+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a-d)\sin(d+z)}$$

$$+ \frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b+z)} + \frac{\cos(d+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b-d)\sin(d+z)}$$

$$+ \frac{\cos(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c+z)} + \frac{\cos(d+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c-d)\sin(d+z)}.$$

Or, d'après ce qui a été établi en dernier lieu,

$$\frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(a-d)}+\frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(b-d)}$$
$$+\frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(c-d)}=\frac{1}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)};$$

donc

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b+z)}$$
$$+\frac{\cos(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c+z)}+\frac{\cos(d+z)}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(d+z)}.$$

4° Posons encore

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)\sin(f+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a+z)\sin(f+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b+z)\sin(f+z)}$$
$$+\frac{\cos(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c+z)\sin(f+z)}+\frac{\cos(d+z)}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(d+z)\sin(f+z)}.$$

Quand, après avoir décomposé ces quatre fractions, on effectue les transformations dont nous avons fait usage pour le cas de trois facteurs, il vient

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)\sin(f+z)}$$
$$=\frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(f-a)\sin(a+z)}+\frac{\cos(a-f)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a-f)\sin(f+z)}$$
$$+\frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(f-b)\sin(b+z)}+\frac{\cos(b-f)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b-f)\sin(f+z)}$$
$$+\frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(f-c)\sin(c+z)}+\frac{\cos(c-f)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c-f)\sin(f+z)}$$
$$+\frac{1}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(f-d)\sin(d+z)}+\frac{\cos(d-f)}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(d-f)\sin(f+z)};$$

et puisque, conformément à la décomposition qui précède,

$$\frac{\cos(a-f)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(a-f)}+\frac{\cos(b-f)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(b-f)}$$
$$+\frac{\cos(c-f)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(c-f)}+\frac{\cos(d-f)}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(d-f)}$$
$$=\frac{1}{\sin(a-f)\sin(b-f)\sin(c-f)\sin(d-f)},$$

on aura

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\sin(d+z)\sin(f+z)}$$
$$=\frac{1}{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(f-a)\sin(a+z)}+\frac{1}{\sin(a-b)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(f-b)\sin(b+z)}$$
$$+\frac{1}{\sin(a-c)\sin(b-c)\sin(d-c)\sin(f-c)\sin(c+z)}+\frac{1}{\sin(a-d)\sin(b-d)\sin(c-d)\sin(f-d)\sin(d+z)}$$
$$+\frac{1}{\sin(a-f)\sin(b-f)\sin(c-f)\sin(d-f)\sin(f+z)}.$$

D'où l'on voit que la marche ultérieure de l'opération ne saurait présenter aucun nouvel incident de calcul et que les résultats se succéderont en changeant alternativement de forme comme ci-dessus.

Donc en général, suivant que la fraction

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots}$$

offre dans son dénominateur un nombre pair ou impair de facteurs, on aura

$$\text{(B)}\qquad \frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots}$$
$$=\frac{\cot(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\ldots}+\frac{\cot(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\ldots}$$
$$+\frac{\cot(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\ldots}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$(C)\qquad \frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots}$$
$$= \frac{\operatorname{coséc}(a+z)}{\sin(b-a)\sin(c-a)\ldots} + \frac{\operatorname{coséc}(b+z)}{\sin(a-b)\sin(c-b)\ldots}$$
$$+ \frac{\operatorname{coséc}(c+z)}{\sin(a-c)\sin(b-c)\ldots} + \ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, au moyen de l'une ou de l'autre de ces formules, on obtiendra la plus simple décomposition de la fraction

$$\frac{P dz}{\sin(a+z)\cos(b-z)\cos(z-c)\ldots};$$

tandis qu'en se servant des suivantes

$$(D)\qquad \int \frac{dz}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots}$$
$$= \operatorname{coséc}(b-a)\operatorname{coséc}(c-a)\ldots\, l\sin(a+z) + \operatorname{coséc}(a-b)\operatorname{coséc}(c-b)\ldots\, l\sin(b+z)$$
$$+ \operatorname{coséc}(a-c)\operatorname{coséc}(b-c)\ldots\, l\sin(c+z) + \ldots\ldots$$
$$+ C$$

ou

$$(E)\qquad \int \frac{dz}{\sin(a+z)\sin(b+z)\sin(c+z)\ldots\ldots}$$
$$= \operatorname{coséc}(b-a)\operatorname{coséc}(c-a)\ldots\, l\operatorname{tang}\frac{a+z}{2} + \operatorname{coséc}(a-b)\operatorname{coséc}(c-b)\ldots\, l\operatorname{tang}\frac{b+z}{2}$$
$$+ \operatorname{coséc}(a-c)\operatorname{coséc}(b-c)\ldots\, l\operatorname{tang}\frac{c+z}{2} + \ldots\ldots$$
$$+ C,$$

dans les mêmes suppositions que ci-dessus, on déterminera immédiatement l'intégrale de toute différentielle de la forme

$$\frac{dz}{\sin(a+z)\cos(b-z)\cos(z-c)\ldots\ldots}.$$

Les applications se feront à l'aide des substitutions indiquées à la suite de la formule (**A**).

Exemple :

$$\int \frac{dz}{\cos(a+z)\cos(b-z)\sin(c-z)} = \int \frac{dz}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+a+z\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b+z\right)\sin(\pi-c+z)}.$$

On écrira donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{\cos(a+z)\cos(b-z)\sin(c-z)} &= \text{coséc}(-b-a)\,\text{coséc}\left(\frac{\pi}{2}-c-a\right) l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a+z}{2}\right) \\ &+ \text{coséc}(a+b)\,\text{coséc}\left(\frac{\pi}{2}-c+b\right) l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b-z}{2}\right) \\ &+ \text{coséc}\left(a+c-\frac{\pi}{2}\right)\text{coséc}\left(c-b-\frac{\pi}{2}\right) l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c-z}{2}\right) \\ &+ \text{C};\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{\cos(a+z)\cos(b-z)\sin(c-z)} &= -\,\text{coséc}(b+a)\,\text{séc}(c+a) l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a+z}{2}\right) \\ &+ \text{coséc}(a+b)\,\text{séc}(c-b)\, l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b-z}{2}\right) \\ &+ \text{séc}(a+c)\,\text{séc}(b-c)\, l\cot\frac{c-z}{z} + \text{C}.\end{aligned}$$

§ 3. *Intégration de la différentielle*

$$\frac{\text{P}dz}{\sin^m(a+z)\cos^n(b-z)\ldots\ldots}$$

16. La fraction

$$\frac{\text{P}dz}{\sin^m(a+z)\cos^n(b-z)\ldots\ldots}$$

peut être intégrée par deux moyens essentiellement différents, savoir, par décomposition ou par la réduction successive des exposants.

La décomposition doit évidemment être opérée de manière que les fractions partielles définitives prennent les formes

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\sin(a+z)}, \qquad \frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m(a+z)}.$$

Pour cela, on appliquera d'abord la formule (C) au plus grand nombre impair de facteurs distincts contenus dans le dénominateur de la fraction

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\cos^n(b-z)\ldots\ldots};$$

et l'on traitera ensuite pareillement chacune des fractions partielles jusqu'à ce qu'il devienne impossible de continuer l'opération. Ce calcul est très-facile ; car il n'exige que l'addition des termes identiques au fur et à mesure qu'ils se présentent. Et il est clair qu'il conduira à un certain nombre de fractions dont les unes fourniront des différentielles que nous avons déjà intégrées, tandis que les autres tomberont dans l'un des cas

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin(b+z)}, \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}.$$

C'est donc de ces dernières que nous avons à nous occuper actuellement.

17. En répétant l'opération

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)} = \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(a+z)} + \frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(b+z)},$$

on trouve

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^m(a+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin^{m-1}(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^m(a+z)}+\frac{\cos(a+z)(\cos b+z)}{\sin(b-a)\sin(a-b)\sin^{m-1}(a+z)}$$
$$+\frac{\cos^2(b+z)}{\sin^2(a-b)\sin^{m-2}(a+z)\sin(b+z)};$$

d'où l'on conclut

$$\text{(F)}\qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin^{m-1}(a+z)}+\frac{\cos^2(b+z)}{\sin^2(a-b)\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots+\frac{\cos^{m-1}(b+z)}{\sin^{m-1}(a-b)\sin(a+z)}\right)$$
$$+\frac{\cos^m(b+z)}{\sin^m(a-b)\sin(b+z)},$$

où l'exposant m peut être indifférement pair ou impair.

Lorsqu'on se sert de la décomposition simplifiée

$$\frac{\cos(k+z)}{\sin(k+z)\sin(i+z)}=\frac{1}{\sin(i-k)\sin(k+z)}-\frac{\cos(i-k)}{\sin(i-k)\sin(i+z)},$$

on obtient deux formules applicables respectivement aux valeurs paires et impaires de m. Il vient

1°

$$\frac{1}{\sin^2(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^2(a+z)}+\frac{\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin(a+z)\sin(b+z)}$$
$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^2(a+z)}-\frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin(a+z)}+\frac{1}{\sin^2(b-a)\sin(b+z)};$$

2°

$$\frac{1}{\sin^3(a+z)\sin(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^3(a+z)} - \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin^2(a+z)} + \frac{1}{\sin^2(b-a)\sin(a+z)\sin(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^3(a+z)} - \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin^2(a+z)} + \frac{\cos(a+z)}{\sin^3(b-a)\sin(a+z)}$$

$$- \frac{\cos(b+z)}{\sin^3(b-a)\sin(b+z)};$$

3°

$$\frac{1}{\sin^4(a+z)\sin(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^4(a+z)} - \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin^3(a+z)} + \frac{\cos(a+z)}{\sin^3(b-a)\sin^2(a+z)}$$

$$- \frac{\cos(b+z)}{\sin^3(b-a)\sin(a+z)\sin(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^4(a+z)} - \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin^3(a+z)} + \frac{\cos(a+z)}{\sin^3(b-a)\sin^2(a+z)}$$

$$- \frac{\cos(b-a)}{\sin^4(b-a)\sin(a+z)} + \frac{1}{\sin^4(b-a)\sin(b+z)};$$

et ainsi de suite. On aura donc

$$\text{(G)} \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^m(a+z)} - \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin^{m-1}(a+z)} + \frac{\cos(a+z)}{\sin^3(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}$$

$$- \frac{\cos(b-a)}{\sin^4(b-a)\sin^{m-3}(a+z)} + \ldots\ldots - \frac{\cos(b-a)}{\sin^m(b-a)\sin(a+z)} + \frac{1}{\sin^m(b-a)\sin(b+z)},$$

si m est pair, ou

$$\text{(H)} \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^m(a+z)} - \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(b-a)\sin^{m-1}(a+z)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\cos(a+z)}{\sin^m(b-a)\sin(a+z)} - \frac{\cos(b+z)}{\sin^m(b-a)\sin(b+z)},$$

si m est impair.

18. Il n'est pas plus difficile d'établir une formule générale qui donne la décomposition de la fraction

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}.$$

Quand, à l'aide de celle (F), on décompose successivement

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^2(b+z)}, \quad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^3(b+z)}, \quad \ldots\ldots,$$

on trouve, en ajoutant simplement les termes identiques,

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}$$

$$= \frac{\cos^n(a+z)}{\sin^n(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)} + \frac{n\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin^{m-1}(a+z)} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{\cos^2(b+z)}{\sin^2(a-b)\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\cos^{m-1}(b+z)}{\sin^{m-1}(a-b)\sin(a+z)}\right)$$
$$+ \frac{\cos^m(b+z)}{\sin^m(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^n(b+z)} + \frac{m\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin^{n-1}(b+z)} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{\cos^2(a+z)}{\sin^2(b-a)\sin^{n-2}(b+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)}\frac{\cos^{n-1}(a+z)}{\sin^{n-1}(b-a)\sin(b+z)}\right).$$

Mais ce résultat, ainsi que celui (F) dont il dérive, ne compensent pas par leur généralité les inconvénients que présente leur application. Les fractions partielles qu'ils fournissent exigent une transformation de leurs numérateurs ; et ce calcul étant effectué, la décomposition est loin d'offrir l'expression la plus simple dont elle est susceptible.

En conséquence, semblablement à ce qui a été fait ci-dessus, nous avons cherché à établir des formules particulières répondant aux différentes combinaisons qu'admettent les valeurs des exposants m et n dans la fraction

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}.$$

A cet effet, nous décomposons cette fraction dans les suppositions successives $n=2$, $n=3,\ldots$ en nous servant tour à tour des formules (G) et (H), et ayant soin de faire

$$\frac{\cos(k+z)}{\sin(k+z)\sin(i+z)}=\frac{1}{\sin(i-k)\sin(a+z)}-\frac{\cos(i-k)}{\sin(i-k)\sin(i+z)}$$

toutes les fois que le cas se présente. Et pour séparer les coefficients numériques qui ne suivent pas une même loi, nous écrivons les résultats comme il suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^3(b+z)}\\
&=\frac{\cos(a+z)}{\sin^3(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)}+\frac{2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}+\frac{3}{\sin^4(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}+\ldots\right)\\
&-\frac{3\cos(b-a)}{\sin^4(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-1}(a+z)}+\frac{2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-3}(a+z)}+\frac{3}{\sin^4(b-a)\sin^{m-5}(a+z)}+\ldots\right)\\
&+\frac{4\cos^2(b-a)\cos(a+z)}{\sin^5(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-2}(a+z)}+\frac{3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}+\frac{6}{\sin^4(b-a)\sin^{m-6}(a+z)}+\ldots\right)\\
&-\frac{4\cos^3(b-a)}{\sin^6(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-3}(a+z)}+\frac{3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-5}(a+z)}+\frac{6}{\sin^4(b-a)\sin^{m-7}(a+z)}+\ldots\right)\\
&+\mathrm{V},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^4(b+z)}\\
&=\frac{1}{\sin^4(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)}+\frac{2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}+\frac{3}{\sin^4(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}+\ldots\right)\\
&-\frac{4\cos(b-a)\cos(a+z)}{\sin^5(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-1}(a+z)}+\frac{3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-3}(a+z)}+\frac{6}{\sin^4(b-a)\sin^{m-5}(a+z)}+\ldots\right)\\
&+\frac{8\cos^2(b-a)}{\sin^6(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-2}(a+z)}+\frac{3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}+\frac{6}{\sin^4(b-a)\sin^{m-6}(a+z)}+\ldots\right)\\
&-\frac{8\cos^3(b-a)\cos(a+z)}{\sin^7(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-3}(a+z)}+\frac{4}{\sin^2(b-a)\sin^{m-5}(a+z)}+\frac{10}{\sin^4(b-a)\sin^{m-7}(a+z)}+\ldots\right)\\
&+\frac{8\cos^4(b-a)}{\sin^8(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-4}(a+z)}+\frac{4}{\sin^2(b-a)\sin^{m-6}(a+z)}+\frac{10}{\sin^4(b-a)\sin^{m-8}(a+z)}+\ldots\right)\\
&+\mathrm{V}_1,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^5(b+z)}$$

$$=\frac{\cos(a+z)}{\sin^5(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)}+\frac{3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}+\frac{6}{\sin^4(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}+\ldots\right)$$
$$-\frac{5\cos(b-a)}{\sin^6(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-1}(a+z)}+\frac{3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-3}(a+z)}+\frac{6}{\sin^4(b-a)\sin^{m-5}(a+z)}+\ldots\right)$$
$$+\frac{12\cos^2(b-a)\cos(a+z)}{\sin^7(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-2}(a+z)}+\frac{4}{\sin^2(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}+\frac{10}{\sin^4(b-a)\sin^{m-6}(a+z)}+\ldots\right)$$
$$-\frac{20\cos^3(b-a)}{\sin^8(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-3}(a+z)}+\frac{4}{\sin^2(b-a)\sin^{m-5}(a+z)}+\frac{10}{\sin^4(b-a)\sin^{m-7}(a+z)}+\ldots\right)$$
$$+\frac{16\cos^4(b-a)\cos(a+z)}{\sin^9(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-4}(a+z)}+\frac{5}{\sin^2(b-a)\sin^{m-6}(a+z)}+\frac{15}{\sin^4(b-a)\sin^{m-8}(a+z)}+\ldots\right)$$
$$-\frac{16\cos^5(b-a)}{\sin^{10}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-5}(a+z)}+\frac{5}{\sin^2(b-a)\sin^{m-7}(a+z)}+\frac{15}{\sin^4(b-a)\sin^{m-9}(a+z)}+\ldots\right)$$
$$+V_2,$$

où V, V_1, V_2 représentent les expressions qui contiennent les puissances consécutives de la fraction

$$\frac{1}{\sin(b+z)},$$

et dont les coefficients dépendent de la valeur de m.

Par un tel rangement de termes, la loi des suites horizontales et la manière dont elles se succèdent, suivant que l'exposant de $\sin(b+z)$ est pair ou impair, deviennent manifestes; et il ne reste plus qu'à trouver la dérivation des coefficients

$$\begin{array}{llllll} 1, & 3, & 4, & 4, & & \\ 1, & 4, & 8, & 8, & 8, & \\ 1, & 5, & 12, & 20, & 16, & 16, \end{array}$$

que comportent les facteurs communs à tous les termes d'une suite.

Désignons par

$$
\begin{array}{llllllll}
1, & A, & B, & C, & D, & E, & F, & \ldots\ldots, \\
1, & A_1, & B_1, & C_1, & D_1, & E_1, & F_1, & \ldots\ldots, \\
1, & A_2, & B_2, & C_2, & D_2, & E_2, & F_2, & \ldots\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

ces coefficients dans les décompositions des fractions

$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)},$$
$$\frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^{n-1}(b+z)}, \quad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^{n-2}(b+z)}, \quad \ldots\ldots$$

On voit par les résultats ci-dessus qu'ils offriront les relations

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + 1, \\
B &= B_1 + A_1 + 1, \\
C &= C_1 + B_1, \\
D &= D_1 + C_1 + B_1, \\
E &= E_1 + D_1, \\
F &= F_1 + E_1 + D_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

si n est pair, ou les suivantes

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + 1, \\
B &= B_1 + A_1, \\
C &= C_1 + B_1 + A_1, \\
D &= D_1 + C_1, \\
E &= E_1 + D_1 + C_1, \\
F &= F_1 + E_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

si n est impair. Or, on a toujours

$$A = n.$$

Maintenant, pour la détermination du coefficient B dans l'hypothèse $n=2i$, on a les équations

$$\begin{aligned} B &= B_1 + A_1 + 1, \\ B_1 &= B_2 + A_2, \\ B_2 &= B_3 + A_3 + 1, \\ B_3 &= B_4 + A_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui donnent par substitution

$$B = A_1 + 1 + A_2 + A_3 + 1 + A_4 + A_5 + 1 + \ldots..$$

Donc, puisque $A_1 = n-1$, $A_2 = n-2$, $A_3 = n-3$,... on conclut

$$B = n + 2(n-2) + 2(n-4) + 2(n-6) + \ldots..$$

et un calcul entièrement semblable donne

$$B = 2(n-1) + 2(n-3) + 2(n-5) + 2(n-7) + \ldots..,$$

lorsqu'on part de l'hypothèse $n = 2i + 1$.

Ensuite comme, supposant $n = 2i$,

$$\begin{aligned} C &= C_1 + B_1, \\ C_1 &= C_2 + B_2 + A_2, \\ C_2 &= C_3 + B_3, \\ C_3 &= C_4 + B_4 + A_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

il vient

$$C = B_1 + B_2 + A_2 + B_3 + B_4 + A_4 + \ldots..$$

où l'on a évidemment

$$
\begin{aligned}
B_1 &= 2(n-2) + 2(n-4) + 2(n-6) + 2(n-8) + \ldots\ldots, \\
B_2 &= n-2 + 2(n-4) + 2(n-6) + 2(n-8) + \ldots\ldots, \\
A_2 &= n-2, \\
B_3 &= 2(n-4) + 2(n-6) + 2(n-8) + 2(n-10) + \ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}
$$

et l'on trouve ainsi

$$
C = 4(n-2) + 8(n-4) + 12(n-6) + 16(n-8) \ldots\ldots
$$

En opérant de cette manière nous obtenons pour $n = 2i$,

$$
\begin{aligned}
A &= n \\
B &= n + 2(n-2) + 2(n-4) + 2(n-6) + \ldots\ldots, \\
C &= 4(n-2) + 8(n-4) + 12(n-6) + 16(n-8) + \ldots\ldots, \\
D &= 4(n-2) + 16(n-4) + 36(n-6) + 64(n-8) + \ldots\ldots, \\
E &= 16(n-4) + 64(n-6) + 160(n-8) + 320(n-10) + \ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

et pour $n = 2i + 1$,

$$
\begin{aligned}
A &= n, \\
B &= 2(n-1) + 2(n-3) + 2(n-5) + 2(n-7) + \ldots\ldots, \\
C &= 2(n-1) + 6(n-3) + 10(n-5) + 14(n-7) + \ldots\ldots, \\
D &= 8(n-3) + 24(n-5) + 48(n-7) + 80(n-9) + \ldots\ldots, \\
E &= 8(n-3) + 40(n-5) + 112(n-7) + 240(n-9) + \ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}
$$

mais on peut mettre sous la même forme les deux suites qui expriment un même coefficient dans ces différentes suppositions. En effet

$$
\begin{aligned}
B &= n + 2(n-2) + 2(n-4) + 2(n-6) + \ldots\ldots \\
&= (n + n - 2) + (n - 2 + n - 4) + (n - 4 + n - 6) + \ldots\ldots \\
&= 2(n-1) + 2(n-3) + 2(n-5) + 2(n-7) + \ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
C &= 2(n-1)+6(n-3)+10(n-5)+14(n-7)+\ldots\ldots \\
&= (2(n-1)+2(n-3))+(4(n-3)+4(n-5))+\ldots\ldots \\
&= 4(n-2)+8(n-4)+12(n-6)+16(n-8)+\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 4(n-2)+16(n-4)+36(n-6)+64(n-8)+\ldots\ldots \\
&= (4(n-2)+4(n-4))+(12(n-4)+12(n-6))+\ldots\ldots \\
&= 8(n-3)+24(n-5)+48(n-7)+80(n-9)+\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

On aura donc, quel que soit n, pair ou impair,

$$\begin{aligned}
A &= n, \\
B &= 2((n-1)+(n-3)+(n-5)+(n-7)+\ldots\ldots), \\
C &= 2^2((n-2)+2(n-4)+3(n-6)+4(n-8)+\ldots\ldots), \\
D &= 2^3((n-3)+3(n-5)+6(n-7)+10(n-9)+\ldots\ldots), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et généralement

$$T = 2^t\left((n-t)+t(n-t-2)+\frac{t(t+1)}{1.2}(n-t-4)+\ldots+U\right),$$

U désignant le dernier terme positif.

Quand on prend les sommes de ces suites et qu'on y change n en m, on retrouve les coefficients de la seconde partie de la décomposition tels qu'ils résultent directement du calcul, mais dont on ne saisit pas alors facilement la loi.

Nous pouvons donc maintenant écrire les formules cherchées.

Pour ne pas compliquer les coefficients, nous ne rangerons pas les termes suivant les puissances de $\frac{1}{\sin(a+z)}$ et $\frac{1}{\sin(b+z)}$.

Or, on sait *à priori* que le calcul est terminé lorsqu'on a assemblé les facteurs appartenant aux premières puissances de ces fractions. On peut donc se dispenser d'écrire les expressions finales des deux parties de la composition. Et, comme ces dernières prennent des formes différentes suivant que $m > n$, $m < n$ ou $m = n$, en les supprimant, nous diminuons de la moitié le nombre de formules nécessaires pour définir tous les cas qni peuvent s'offrir. Il suffit alors d'établir les trois suivantes :

1° Soient $m = 2k$, $n = 2i$.

On aura

$$\text{(K)} \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}$$

$$= \frac{1}{\sin^n(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)} + \frac{i}{\sin^2(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i(i+1)}{1.2\sin^4(b-a)\sin^{m-4}(a+z)} + \ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+i-2)}{1.2\ldots(i-1)\sin^{m-2}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

$$- \frac{n\cos(b-a)\cos(a+z)}{\sin^{n+1}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-1}(a+z)} + \frac{i+1}{\sin^2(b-a)\sin^{m-3}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots i\sin^{m-2}(b-a)\sin(a+z)}\right)$$

$$+ 2((n-1)+(n-3)+(n-5)+\ldots+1)\frac{\cos^2(b-a)}{\sin^{n+2}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-2}(a+z)} + \frac{i+1}{\sin^2(b-a)\sin^{m-4}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{(k-1)k\,.\,.(k+i-2)}{1.2\ldots i\sin^{m-4}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

$$- 2^2((n-2)+2(n-4)+3(n-6)+\ldots+(i-1)2)\frac{\cos^3(b-a)\cos(a+z)}{\sin^{n+3}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-3}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i+2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-5}(a+z)} + \ldots + \frac{(k-1)k\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-4}(b-a)\sin(a+z)}\right)$$

$$+ 2^3\left((n-3)+3(n-5)+6(n-7)+\ldots+\frac{(i-1)i}{1.2}\right)\frac{\cos^4(b-a)}{\sin^{n+4}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-4}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i+2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-6}(a+z)} + \ldots\ldots + \frac{(k-2)(k-1)\ldots(k+i-2)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-6}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{\sin^m(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^n(b+z)} + \frac{k}{\sin^2(a-b)\sin^{n-2}(b+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{k(k+1)}{1.2\sin^4(a-b)\sin^{n-4}(b+z)} + \ldots\ldots + \frac{i(i+1)\ldots(i+k-2)}{1.2\ldots(k-1)\sin^{n-2}(a-b)\sin^2(b+z)}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2° Soient maintenant $m = 2k+1$, $n = 2i+1$.

On aura

$$\text{(L)} \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin^n(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)} + \frac{i+1}{\sin^2(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{(i+1)(i+2)}{1.2\sin^4(b-a)\sin^{m-4}(a+z)} + \ldots + \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+i)}{1.2\ldots i\sin^{m-1}(b-a)\sin(a+z)}\right)$$

$$-\frac{n\cos(b-a)}{\sin^{n+1}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-1}(a+z)} + \frac{(i+1)}{\sin^2(b-a)\sin^{m-3}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+i-i)}{1.2\ldots i\sin^{m-3}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

$$+ 2(n-1) + (n-3) + (n-5) + \ldots + 2)\frac{\cos^2(b-a)\cos(a+z)}{\sin^{n+2}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i+2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-4}(a+z)} + \ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+i)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-3}(b-a)\sin(a+z)}\right)$$

$$+ 2^2((n-2) + 2(n-4) + 3(n-6) + \ldots + i)\frac{\cos^3(b-a)}{\sin^{n+3}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-3}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i+2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-5}(a+z)} + \ldots + \frac{(k-1)k\ldots(k-i-1)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-5}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

$$+ 2^3\left((n-3) + 3(n-5) + 6(n-7) + \ldots + \frac{(i-1)i}{1.2}2\right)\frac{\cos^4(b-a)\cos(a+z)}{\sin^{n+4}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-4}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i+3}{\sin^2(b-a)\sin^{m-6}(a+z)} + \ldots + \frac{(k-1)k\ldots(k+i)}{1.2\ldots(i+2)\sin^{m-5}(b-a)\sin(a+z)}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\cos(b+z)}{\sin^m(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^n(b+z)} + \frac{k+1}{\sin^2(a-b)\sin^{n-2}(b+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{(k+1)(k+2)}{1.2\sin^4(a-b)\sin^{n-4}(b+z)} + \ldots + \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+k)}{1.2\ldots k\sin^{n-1}(a-b)\sin(b+z)}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3° Soient enfin $m = 2k$, $n = 2i+1$.

On aura

$$\text{(M)} \qquad \frac{1}{\sin^m(a+z)\sin^n(b+z)}$$

$$= \frac{\cos(a+z)}{\sin^n(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^m(a+z)} + \frac{i+1}{\sin^2(b-a)\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{(i+1)(i+2)}{1.2\sin^4(b-a)\sin^{m-4}(a+z)} + \ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots i\sin^{m-2}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

$$- \frac{n\cos(b-a)}{\sin^{n+1}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-1}(a+z)} + \frac{i+1}{\sin^2(b-a)\sin^{m-3}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots i\sin^{m-2}(b-a)\sin(a+z)}\right)$$

$$+ 2\Big((n-1)+(n-3)+(n-5)+\ldots+2\Big)\frac{\cos^2(b-a)\cos(a+z)}{\sin^{n+2}(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^{m-2}(a+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{i+2}{\sin^2(b-a)\sin^{m-4}(a+z)} + \ldots + \frac{(k-1)k\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-4}(b-a)\sin^2(a+z)}\right)$$

— . . . .

$$+ \frac{1}{\sin^m(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^n(b+z)} + \frac{k}{\sin^2(a-b)\sin^{n-2}(b+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{k(k+1)}{1.2\sin^4(a-b)\sin^{n-4}(b+z)} + \ldots + \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+k-1)}{1.2\ldots(k-1)\sin^{n-1}(a-b)\sin(b+z)}\right)$$

$$- \frac{m\cos(a-b)\cos(b+z)}{\sin^{m+1}(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^{n-1}(b+z)} + \frac{k+1}{\sin^2(a-b)\sin^{n-3}(b+z)}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{1.2\ldots k\sin^{n-3}(a-b)\sin^2(b+z)}\right)$$

$$+ 2\Big((m-1)+(m-3)+(m-5)+\ldots+1\Big)\frac{\cos^2(a-b)}{\sin^{m+2}(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^{n-2}(b+z)}\right.$$
$$\left. + \frac{k+i}{\sin^2(a-b)\sin^{n-4}(b+z)} + \ldots + \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{1.2\ldots k\sin^{n-3}\sin(b+z)}\right)$$

— . . . .

Dans les deux premières de ces formules, les deux parties de la décomposition suivent la même loi. Dans la troisième, la première partie procède comme la formule (L), et la seconde, comme celle (K), à l'exception toutefois des derniers termes des suites horizontales. Mais en général, dans ces suites, il suffit de connaître le coefficient du second terme; car les suivants sont donnés par la série

$$1+t+\frac{t(t+1)}{1.2}+\frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{p(p+1)\ldots(p+t-2)}{1.2\ldots(t-1)}+\ldots;$$

et, par les valeurs des exposants m et n, on sait où l'on doit s'arrêter.

Hâtons-nous de constater l'utilité de ces formules.

Conformément à la formule générale (I), on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin^3(a+z)\sin^2(b+z)}\\&=\frac{\cos^2(a+z)}{\sin^2(b-a)}\left(\frac{1}{\sin^3(a+z)}+\frac{2\cos(b+z)}{\sin(a-b)\sin^2(a+z)}+\frac{3\cos^2(b+z)}{\sin^2(a-b)\sin(a+z)}\right)\\&+\frac{\cos^3(b+z)}{\sin^3(a-b)}\left(\frac{1}{\sin^2(b+z)}+\frac{3\cos(a+z)}{\sin(b-a)\sin(b+z)}\right);\end{aligned}$$

et, après la transformation des numérateurs, il vient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin^3(a+z)\sin^2(b+z)}\\&=\frac{\cos^2(a+z)}{\sin^2(b-a)\sin^3(a+z)}-\frac{2\cos(b-a)\cos^3(a+z)}{\sin^3(b-a)\sin^2(a+z)}+\frac{2\cos^2(a+z)}{\sin^2(b-a)\sin(a+z)}\\&+\frac{3\cos^2(b-a)\cos^4(a+z)}{\sin^4(b-a)\sin(a+z)}-\frac{6\cos(b-a)\cos^3(a+z)}{\sin^3(b-a)}+\frac{3\cos^2(a+z)\sin(a+z)}{\sin^2(b-a)}\\&+\frac{\cos^3(b+z)}{\sin^3(a-b)\sin^2(b+z)}-\frac{3\cos(a-b)\cos^4(b+z)}{\sin^4(b-a)\sin(b+z)}+\frac{3\cos^3(b+z)}{\sin^3(a-b)};\end{aligned}$$

tandis que la formule (M) donne immédiatement

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin^3(a+z)\sin^2(b+z)}\\&=\frac{1}{\sin^2(b-a)\sin^3(a+z)}-\frac{2\cos(b-a)\cos(a+z)}{\sin^3(b-a)\sin^2(a+z)}+\frac{1+2\cos^2(b-a)}{\sin^4(b-a)\sin(a+z)}\\&+\frac{\cos(b+z)}{\sin^3(a-b)\sin^2(b+z)}-\frac{3\cos(a-b)}{\sin^4(a-b)\sin(b+z)}.\end{aligned}$$

19. Un autre des deux moyens dont on peut se servir pour effectuer l'opération

$$\int \frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m(a+z)\cos^n(b-z)\ldots\ldots},$$

consiste à réduire par des intégrations successives les exposants $m, n\ldots$ de telle sorte qu'en dernier lieu on ait à déterminer des intégrales traitées dans ce qui précède.

Pour y parvenir, on peut opérer de différentes manières. Le procédé que nous indiquons offre l'avantage d'être fondé sur l'application d'une seule formule. Il semble même être le plus expéditif.

Représentons maintenant par

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)\ldots\ldots}$$

la fraction qu'il s'agit d'intégrer ; et nous aurons à considérer les différentielles

$$\frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots\ldots}, \quad \frac{\sin^\alpha z\,dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots\ldots},$$
$$\frac{\cos^\beta z\,dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots\ldots}, \quad \frac{\sin^\gamma z\cos^\delta z\,dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots\ldots}.$$

I

Le cas le plus simple est celui

$$\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)}.$$

On obtient successivement

$$\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(a+z)\,dz}{\cos^m(a+z)\cos^{n-1}(b+z)} - \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(b+z)\,dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^n(b+z)}$$

$$= \frac{1}{(m-1)\sin(a-b)\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)} - \frac{m+n-2}{(m-1)\sin(a-b)} \int \frac{\sin(b+z)dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^n(b+z)};$$

et, comme en vertu de la décomposition

$$\frac{\cos(k+z)}{\sin(k+z)\sin(i+z)} = \frac{1}{\sin(i-k)\sin(a+z)} - \frac{\cos(i-k)}{\sin(i-k)\sin(i+z)},$$

dont nous faisons fréquemment usage, on a

$$\frac{\sin(b+z)dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^n(b+z)} = \frac{\cos(a-b)\,dz}{\sin(a-b)\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)}$$
$$- \frac{dz}{\sin(a-b)\cos^{m-2}(a+z)\cos^n(b+z)},$$

on conclut

$$\text{(N)} \qquad \int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)}$$
$$= \frac{1}{(m-1)\sin(a-b)\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)}$$
$$- \frac{m+n-2}{(m-1)\sin^2(a-b)} \left(\cos(a-b)\int \frac{dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)} \right.$$
$$\left. - \int \frac{dz}{\cos^{m-2}(a+z)\cos^n(b+z)}\right).$$

Cette formule conduira à

$$\int \frac{dz}{\cos^i(b+z)}, \qquad \int \frac{dz}{\cos(a+z)\cos^k(b+z)};$$

et par suite, si $k>1$, on continuera de l'appliquer à la réduction de cet exposant, jusqu'à ce qu'on parvienne à

$$\int \frac{dz}{\cos(b+z)\cos(a+z)}$$

ou

$$\int \frac{dz}{\cos(a+z)}.$$

Passons à l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)}.$$

En intégrant par parties le premier terme du second membre de l'équation

$$\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a+z)\,dz}{\cos^m(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$- \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(b+z)\,dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)};$$

on trouve

$$\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$= \frac{1}{(m-1)\sin(a-b)\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$- \frac{m+n-2}{(m-1)\sin(a-b)}\int \frac{\sin(b+z)\,dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$- \frac{p}{(m-1)\sin(a-b)}\int \frac{\sin(c+z)\,dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^{p+1}(c+z)};$$

et lorsqu'on décompose comme précédemment les deux fractions sous les signes, la première par rapport aux facteurs $\cos(a+z)$, $\cos(b+z)$, et la seconde par rapport à ceux $\cos(a+z)$, $\cos(c+z)$, on obtient

$$(\mathrm{O})\qquad \int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$= \frac{1}{(m-1)\sin(a-b)}\left(\frac{1}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^p(c+z)}\right.$$

$$-\left[(m+n-2)\cot(a-b)+p\cot(a-c)\right]\int\frac{dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$+\frac{m+n-2}{\sin(a-b)}\int\frac{dz}{\cos^{m-2}(a+z)\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)}$$

$$\left.+\frac{p}{\sin(a-c)}\int\frac{dz}{\cos^{m-2}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^{p+1}(c+z)}\right).$$

Les applications successives de cette formule se feront comme il suit :

On réduira d'abord à $m=0$ ou $m=1$, l'exposant m. Et, puisque les termes restant à intégrer, dans lesquelles $m=0$, rentrent dans les intégrales que nous avons déjà traitées, on aura ultérieurement à opérer sur des expressions telles que

$$\int\frac{dz}{\cos(a+z)\cos^k(b+z)\cos^i(c+z)}.$$

Alors, dans la formule ci-dessus, on écrira $\cos^k(b+z)$ à la place de $\cos^m(a+z)$, et $\cos(a+z)$ à la place de $\cos^n(b+z)$; ce qui donne

$$\int\frac{dz}{\cos^k(b+z)\cos(a+z)\cos^i(c+z)}$$

$$=\frac{1}{(k-1)\sin(b-a)}\left(\frac{1}{\cos^{k-1}(b+z)\cos^i(c+z)}\right.$$

$$-\left[(k-1)\cot(b-a)+i\cot(b-c)\right]\int\frac{dz}{\cos^{k-1}(b+z)\cos^i(c+z)}$$

$$+\frac{k-1}{\sin(b-a)}\int\frac{dz}{\cos^{k-2}(b+z)\cos(a+z)\cos^i(c+z)}$$

$$\left.+\frac{i}{\sin(b-c)}\int\frac{dz}{\cos^{k-2}(b+z)\cos^{i+1}(c+z)}\right).$$

Écartant de nouveau les termes où $m=0$, on appliquera la formule à l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\cos^{k-2}(b+z)\cos(a+z)\cos^i(c+z)},$$

qui donnera la suivante

$$\int \frac{dz}{\cos^{k-4}(b+z)\cos(a+z)\cos^i(c+z)}$$

pour l'opération ultérieure. On parviendra donc ainsi à

$$\int \frac{dz}{\cos(a+z)\cos^i(c+z)}$$

ou

$$\int \frac{dz}{\cos(b+z)\cos(a+z)\cos^i(c+z)},$$

suivant que le nombre k sera pair ou impair. Et dans ce dernier cas, on répétera sur

$$\int \frac{dz}{\cos^i(c+z)\cos(b+z)\cos(a+z)}$$

une opération absolument semblable jusqu'à ce que l'intégrale qui conserve cette forme devienne

$$\int \frac{dz}{\cos(b+z)\cos(a+z)}$$

ou

$$\int \frac{dz}{\cos(c+z)\cos(b+z)\cos(a+z)}.$$

Les autres réductions et les intégrations finales s'effectueront par les formules respectives établies dans ce qui précède.

On observera que la formule (O), en diminuant l'exposant m, fait croître celui p. Pour éviter ceci, il suffirait de remplacer son dernier terme par le second membre de l'équation

$$\int \frac{dz}{\cos^{p+1}(c+z)\cos^{m-2}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)}$$

$$= \frac{1}{p\sin(c-a)}\left(\frac{1}{\cos^{p}(c+z)\cos^{m-3}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)}\right.$$

$$-\left[(p+m-3)\cot(c-a)+(n-1)\cot(c-b)\right]\int\frac{dz}{\cos^{p}(c+z)\cos^{m-3}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)}$$

$$+\frac{p+m-3}{\sin(c-a)}\int\frac{dz}{\cos^{p-1}(c+z)\cos^{m-2}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)}$$

$$\left.+\frac{n-1}{\sin(c-b)}\int\frac{dz}{\cos^{p-1}(c+z)\cos^{m-3}(a+z)\cos^{n}(b+z)}\right);$$

mais la nouvelle formule ainsi obtenue serait d'une application moins commode.

Pour un nombre quelconque de facteurs dans le dénominateur d'une fraction de ce genre, on trouve

$$\text{(P)}\qquad \int\frac{dz}{\cos^{m}(a+z)\cos^{n}(b+z)\cos^{p}(c+z)\cos^{q}(d+z)\ldots}$$

$$=\frac{1}{(m-1)\sin(a-b)}\left(\frac{1}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^{p}(c+z)\cos^{q}(d+z)\ldots}\right.$$

$$-\left[(m+n-2)\cot(a-b)+p\cot(a-c)\right.$$

$$\left.+q\cot(a-d)+\ldots\right]\int\frac{dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^{p}(c+z)\cos^{q}(d+z)\ldots}$$

$$+\frac{m+n-2}{\sin(a-b)}\int\frac{dz}{\cos^{m-2}(a+z)\cos^{n}(b+z)\cos^{p}(c+z)\cos^{q}(d+z)\ldots}$$

$$+\frac{p}{\sin(a-c)}\int\frac{dz}{\cos^{m-2}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^{p+1}(c+z)\cos^{q}(d+z)\ldots}$$

$$+\frac{q}{\sin(a-d)}\int\frac{dz}{\cos^{m-2}(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\cos^{p}(c+z)\cos^{q+1}(c+z)\ldots}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par la forme seule de cette expression, on voit que les indications données relativement à l'usage de la formule (O) doivent être suivies généralement.

II

La réduction qui nous occupe peut être effectuée par un même procédé dans les trois fractions

$$\frac{\sin^\alpha z dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},\quad \frac{\cos^\beta z dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},\quad \frac{\sin^\gamma z \sin^\delta z dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots}.$$

On commencera par rapporter $\sin z, \cos z$ à l'arc $a+z$. Si, dans le dénominateur d'une fraction obtenue par cette opération, $\cos(a+z)$ venait à disparaître et que, dans son numérateur on eût $\sin^\eta(a+z)$, $\cos^\varepsilon(a+z)$, ou $\sin^\rho(a+z)\cos^\xi(a+z)$, on rapporterait de nouveau ce dernier à l'arc $b+z$. De cette manière on parviendra toujours à un résultat dans lequel toutes les différentielles fractionnaires seront de la forme

$$\frac{A dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},$$

ou

$$\frac{B \sin^\alpha(a+z)dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},$$

A et B désignant des constantes. Or, lorsque dans

$$\frac{\sin^\alpha(a+z)dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},$$

on remplace $\sin^\alpha(a+z)$ par $(1-\cos^2(a+z))^r$ ou par $(1-\cos^2(a+z))^r \times \sin(a+z)$, suivant que $\alpha=2r$ ou $\alpha=2r+1$, le binôme étant développé, on a des fractions comme

$$\frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},\quad \frac{\sin(a+z)dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots};$$

et l'on peut en obtenir aussi qui n'auront plus $\cos(a+z)$ dans leurs dénominateurs.

Aux intégrales

$$\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},$$

$$\int \frac{\sin(a+z)dz}{\cos^m(a+z)\cos^n(b+z)\ldots} = \operatorname{coséc}(a-b)\int \frac{dz}{\cos^m(a+z)\cos^{n-1}(b+z)\ldots}$$
$$-\cot(a-b)\int \frac{dz}{\cos^{m-1}(a+z)\cos^n(b+z)\ldots},$$

on appliquera immédiatement la formule (P). Et quant aux fractions dont il y aurait lieu de transformer de nouveau les numérateurs, il est évident que l'opération conduira encore à

$$\frac{A dz}{\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)\ldots}, \qquad \frac{B\sin^\beta(b+z)dz}{\cos^n(b+z)\cos^p(c+z)\ldots},$$

et que ces résultats contiendront déjà dans leurs dénominateurs moins de facteurs que la différentielle donnée

$$\frac{P dz}{\cos^m(b+z)\cos^n(b+z)\ldots}.$$

Ainsi, en opérant comme il vient d'être dit, on effectuera au moyen de la formule unique (P), la réduction des exposants dans toute intégrale de la forme

$$\int \frac{P dz}{\sin^m(a+z)\cos^n(b-z)\ldots}.$$

Les identités

$$\sin(a+z) = \cos\left(a+z-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin(a-z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a+z\right),$$

$$\cos(a-z) = \cos(z-a),$$

serviront aux applications de cette formule.

20. Déterminons maintenant par les deux méthodes différentes l'intégrale

$$\int \frac{\cos(b+z)dz}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}.$$

On a

$$\int \frac{\cos(b+z)dz}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \cot(b+g)\int \frac{dz}{\sin(b+z)\sin^3(g-z)} + \frac{1}{\sin(b+g)}\int \frac{dz}{\sin^2(b+z)\sin^2(g-z)};$$

et en posant

$$\int \frac{dz}{\sin(b+z)\sin^3(g-z)} = \int \frac{dz}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-g+z\right)\cos\left(b+z-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\int \frac{dz}{\sin^2(b+z)\sin^2(g-z)} = \int \frac{dz}{\cos^2\left(b+z-\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-g+z\right)},$$

on obtient par la formule (P)

$$\int \frac{dz}{\sin(b+z)\sin^3(g-z)} = \frac{1}{2\sin(b+g)\sin^2(g-z)}$$

$$+ \frac{\cos(b+g)}{\sin^2(b+g)}\int \frac{dz}{\sin^2(g-z)} + \frac{1}{\sin^2(b+g)}\int \frac{dz}{\sin(g-z)\sin(b+z}$$

$$\int \frac{dz}{\sin^2(b+z)\sin^2(g-z)} = -\frac{1}{\sin(b+g)\sin(b+z)\sin(g-z)}$$

$$+ \frac{2\cos(b+g)}{\sin^2(b+g)}\int \frac{dz}{\sin(b+z)\sin(g-z)} + \frac{2}{\sin^2(b+g)}\int \frac{dz}{\sin^2(g-z)}.$$

On aura donc

$$\int \frac{\cos(b+z)dz}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \frac{\cot(b+g)}{2\sin(b+g)\sin^2(g-z)} - \frac{1}{\sin^2(b+g)\sin(b+z)\sin(g-z)}$$

$$+ \frac{2+\cos^2(b+g)}{\sin^3(b+g)}\int\frac{dz}{\sin^2(g-z)} + \frac{3\cot(b+g)}{\sin^2(b+g)}\int\frac{dz}{\sin(b+z)\sin(g-z)};$$

et, en définitive,

$$\int \frac{\cos(b+z)dz}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \frac{\cot(b+g)}{2\sin(b+g)\sin^2(g-z)} - \frac{1}{\sin^2(b+g)\sin(b+z)\sin(g-z)}$$

$$+ \frac{(2+\cos^2(b+g))\cot(g-z)}{\sin^3(b+g)} + \frac{3\cot(b+g)}{\sin^3(b+g)}\, l\,\frac{\sin(b+z)}{\sin(g-z)}$$

$$+ \mathrm{C}.$$

Pour opérer par décomposition, on peut d'abord appliquer la formule (M) à la fraction

$$\frac{1}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \frac{1}{\sin^2(b+g)\sin^3(g-z)} + \frac{2\cos(b+g)\cos(g-z)}{\sin^3(b+g)\sin^2(g-z)} + \frac{1+2\cos^2(b+g)}{\sin^4(b+g)\sin(g-z)}$$

$$+ \frac{\cos(b+z)}{\sin^3(b+g)\sin^2(b+z)} + \frac{3\cos(b+g)}{\sin^4(b+g)\sin(b+z)};$$

mais alors, cette équation étant multipliée par $\cos(b+z)$, il faut, dans les trois premiers termes de son second membre, rapporter $\cos(b+z)$ à l'arc $g-z$. En réduisant ensuite au moyen de l'identité $\cos^2 k = 1-\sin^2 k$, on trouve

$$\frac{\cos(b+z)}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \frac{\cos(b+g)\cos(g-z)}{\sin^2(b+g)\sin^3(g-z)} + \frac{1+\cos^2(b+g)}{\sin^3(b+g)\sin^2(g-z)} + \frac{3\cos(b+g)\cos(g-z)}{\sin^4(b+g)\sin(g-z)}$$

$$+ \frac{1}{\sin^3(b+g)\sin^2(b+z)} + \frac{3\cos(b+g)\cos(b+z)}{\sin^4(b+g)\sin(b+z)}.$$

On évite ce calcul et l'on obtient le même résultat lorsque, aux deux fractions qui forment le second membre de l'équation

$$\frac{\cos(b+z)}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \frac{\cos(b+g)}{\sin(b+g)\sin(b+z)\sin^3(g-z)} + \frac{1}{\sin(b+g)\sin^2(b+z)\sin^2(g-z)},$$

on applique respectivement les formules (H) et (K).

Donc, la décomposition conduit à

$$\int \frac{\cos(b+z)dz}{\sin^2(b+z)\sin^3(g-z)}$$

$$= \frac{\cos(b+g)}{2\sin^2(b+g)\sin^2(g-z)} + \frac{[1+\cos^2(b+g)]\cot(g-z)}{\sin^3(b+g)}$$

$$- \frac{\cot(b+z)}{\sin^3(b+g)} + \frac{3\cos(b+g)}{\sin^4(b+g)}\, l\, \frac{\sin(b+z)}{\sin(g-z)}$$

$$+ C.$$

et il est facile de s'assurer que ces deux intégrales sont identiques.

On verra toujours par la forme de la différentielle comment il faut opérer pour parvenir le plus aisément à l'expression de son intégrale.

§ 4. *Intégration de la différentielle*

$$\frac{\mathrm{P}\,\mathrm{tang}(a+z)\cot(b-z)\ldots}{\cot(z-c)\,\mathrm{tang}(d+z)\ldots}\,dz.$$

21. On peut intégrer la différentielle

$$\frac{\mathrm{P}\,\mathrm{tang}(a+z)\cot(b-z)\ldots}{\cot(z-c)\,\mathrm{tang}(d+z)\ldots}\,dz$$

en la traitant comme

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\cos(a+z)\sin(b-z)\cos(z-c)\ldots};$$

mais on parvient à un résultant plus simple quand, pour effectuer la décomposition, on la remplace par le produit

$$\mathrm{P}\,\mathrm{tang}(a+z)\cot(b-z)\,\mathrm{tang}(z-c)\ldots dz.$$

Nous décomposons les produits formés de deux tangentes ou cotangentes en opérant de cette manière :

$$\cot(a+z)\cot(b+z)=\frac{\cos(a+z)\cos(b+z)+\sin(a+z)\sin(b+z)}{\sin(a+z)\sin(b+z)}-1$$

$$=\frac{\cos(a-b)}{\sin(a+z)\sin(b+z)}-1;$$

et comme

$$\frac{1}{\sin(a+z)\sin(b+z)}=\frac{\cot(a+z)}{\sin(b-a)}+\frac{\cot(b+z)}{\sin(a-b)},$$

il vient

$$\cot(a+z)\cot(b+z) = \cot(b-a)\cot(a+z) + \cot(a-b)\cot(b+z) - 1.$$

On obtient ainsi

$$\cot(a+z)\operatorname{tang}(b+z) = \operatorname{tang}(b-a)\cot(a+z) + \operatorname{tang}(b-a)\operatorname{tang}(b+z) + 1,$$
$$\operatorname{tang}(a+z)\operatorname{tang}(b+z) = \cot(a-b)\operatorname{tang}(a+z) + \cot(b-a)\operatorname{tang}(b+z) - 1,$$

. . . .

Ces décompositions subsistent évidemment lorsqu'on change z en $-z$, et par suite il en sera de même de toutes celles qui s'en déduisent.

22. Soit

$$\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\ldots$$

un produit de n cotangentes.

1° Nous avons déjà trouvé

$$\cot(a+z)\cot(b+z) = \cot(b-a)\cot(a+z) + \cot(a-b)\cot(b+z) - 1.$$

2° Il s'ensuit

$$\begin{aligned}&\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\\ &= \cot(b-a)\cot(a+z)\cot(c+z) + \cot(a-b)\cot(b+z)\cot(c+z) - \cot(c+z);\end{aligned}$$

et l'on obtient, en décomposant,

$$\begin{aligned}&\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\\ &= \cot(b-a)\cot(c-a)\cot(a+z) + \cot(b-a)\cot(a-c)\cot(c+z) - \cot(b-a)\\ &+ \cot(a-b)\cot(c-b)\cot(b+z) + \cot(a-b)\cot(b-c)\cot(c+z) - \cot(a'-b)\\ &- \cot(c+z).\end{aligned}$$

Or

$$\cot(b-a) + \cot(a-b) = 0,$$

et

$$[\cot(b-a)\cot(a-c) + \cot(a-b)\cot(b-c) - 1]\cot(c+z)$$
$$= \cot(a-c)\cot(b-c)\cot(c+z);$$

donc

$$\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)$$
$$= \cot(b-a)\cot(c-a)\cot(a+z) + \cot(a-b)\cot(c-b)\cot(b+z)$$
$$+ \cot(a-c)\cot(b-c)\cot(c+z).$$

3° On peut donc poser

$$\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\cot(d+z)$$
$$= \cot(b-a)\cot(c-a)\cot(a+z)\cot(d+z) + \cot(a-b)\cot(c-b)\cot(b+z)\cot(d+z)$$
$$+ \cot(a-c)\cot(b-c)\cot(c+z)\cot(d+z);$$

ce qui donne

$$\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\cot(d+z)$$
$$= \cot(b-a)\cot(c-a)[\cot(d-a)\cot(a+z) + \cot(a-d)\cot(d+z) - 1]$$
$$+ \cot(a-b)\cot(c-b)[\cot(d-b)\cot(b+z) + \cot(b-d)\cot(d+z) - 1]$$
$$+ \cot(a-c)\cot(b-c)[\cot(d-c)\cot(c+z) + \cot(c-d)\cot(d+z) - 1].$$

Or, en vertu de la décomposition établie en dernier lieu, on a

$$[\cot(b-a)\cot(c-a)\cot(a-d) + \cot(a-b)\cot(c-b)\cot(b-d)$$
$$+ \cot(a-c)\cot(b-c)\cot(c-d)]\cot(d+z) = \cot(a-d)\cot((b-d)\cot c-d)\cot(d+z);$$

et comme d'ailleurs

$$-\cot(b-a)\cot(c-a)-\cot(a-b)\cot(c-b) = \cot(b-a)\cot(a-c)+\cot(a-b)\cot(b-c)$$
$$= \cot(a-c)\cot(b-c)+1,$$

de sorte que

$$-\cot(b-a)\cot(c-a)-\cot(a-b)\cot(c-b)-\cot(a-c)\cot(b-c)=1,$$

on conclut

$$\begin{aligned}&\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\cot(d+z)\\
&=\cot(b-a)\cot(c-a)\cot(d-a)\cot(a+z)+\cot(a-b)\cot(c-b)\cot(d-b)\cot(b+z)\\
&+\cot(a-c)\cot(b-c)\cot(d-c)\cot(c+z)+\cot(a-d)\cot(b-d)\cot(c-d)\cot(d+z)\\
&+1.\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque n est un nombre pair, le dernier terme du résultat est l'unité positive ou négative, suivant que $n=4k$ ou $n=2(2k-1)$.

On peut donc définir généralement la décomposition du produit

$$\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\ldots$$

formé de n facteurs, comme il suit

$$\text{(Q)}\qquad\begin{aligned}&\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\ldots\\
&=\cot(b-a)\cot(c-a)\ldots\cot(a+z)+\cot(a-b)\cot(c-b)\ldots\cot(b+z)\\
&+\cot(a-c)\cot(b-c)\ldots\cot(c+z)+\ldots\ldots\\
&+\cos\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

Cette formule entraîne la suivante

$$\text{(R)}\qquad\begin{aligned}&\int\cot(a+z)\cot(b+z)\cot(c+z)\ldots dz\\
&=\cot(b-a)\cot(c-a)\ldots l\sin(a+z)+\cot(a-b)\cot(c-b)\ldots l\sin(b+z)\\
&+\cot(a-c)\cot(b-c)\ldots l\sin(c+z)+\ldots\ldots+z\cos\frac{n\pi}{2}\\
&+C.\end{aligned}$$

Les applications de ces deux formules se feront au moyen des identités

$$\operatorname{tang}(a+z) = -\cot\left(\frac{\pi}{2}+a+z\right),$$

$$\operatorname{tang}(a-z) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-a+z\right),$$

$$\cot(a-z) = -\cot(z-a).$$

Exemple :

$$\int \frac{\cot(b+z)}{\cot(a+z)}\,dz = \int \operatorname{tang}(a+z)\cot(b+z)\,dz$$

$$= -\int \cot\left(\frac{\pi}{2}+a+z\right)\cot(b+z)\,dz.$$

On fera donc

$$\int \frac{\cot(b+z)}{\cot(a+z)}\,dz = -\left[\cot\left(b-a-\frac{\pi}{2}\right) l\sin\left(\frac{\pi}{2}+a+z\right) \right.$$

$$\left. + \cot\left(\frac{\pi}{2}+a-b\right) l\sin(b+z) - z\right] + C;$$

ce qui donne

$$\int \frac{\cot(b+z)}{\cot(a+z)} = \operatorname{tang}(a-b)\, l\,\frac{\sin(b+z)}{\cos(a+z)} + z + C.$$

§ 5. *Intégration de la différentielle*

$$\frac{P\operatorname{tang}^m(a+z)\cot^n(b-z)\dots}{\cot^p(z-c)\operatorname{tang}^q(d+z)\dots}\,dz.$$

23. Pour effectuer la décomposition de la fraction

$$\frac{\operatorname{tang}^m(a+z)\cot^n(b-z)\dots}{\cot^p(z-c)\operatorname{tang}^q(d+z)\dots},$$

ou, ce qui est la même chose, du produit

$$\operatorname{tang}^m(a+z)\cot^n(b-z)\operatorname{tang}^p(z-c)\ldots$$

on se servira d'abord de la formule (Q).

Comme cette formule, dans le cas de n facteurs, donne $n+1$ termes lorsque $n=2k$, tandis qu'elle n'en fournit que n quand $n=2k+1$, on l'appliquera toujours au plus grand nombre impair de facteurs distincts. Ce calcul conduira à des produits partiels tels que

$$\cot^m(a+z)\cot(b+z), \quad \cot^m(a+z)\cot^n(b+z),$$

qu'on décomposera ensuite par les formules que nous allons établir.

24. En répétant l'opération

$$\cot(a+z)\cot(b+z) = \cot(b-a)\cot(a+z) + \cot(a-b)\cot(b+z) - 1,$$

on obtient

1°

$$\begin{aligned}
&\cot^2(a+z)\cot(b+z)\\
&= \cot(b-a)\cot^2(a+z) + \cot(a-b)\cot(b+z)\cot(a+z) - \cot(a+z)\\
&= \cot(b-a)\cot^2(a+z) - (\cot^2(a-b)+1)\cot(a+z) + \cot^2(a-b)\cot(b+z)\\
&\quad - \cot(a-b);
\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}
&\cot^3(a+z)\cot(b+z)\\
&= \cot(b-a)\cot^3(a+z) - [\cot^2(a-b)+1]\cot^2(a+z) - [\cot^2(a-b)+1]\cot(a-b)\cot(a+z)\\
&\quad + \cot^3(a-b)\cot(b+z) - \cot^2(a-b);
\end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned}
&\cot^4(a+z)\cot(b+z)\\
&= \cot(b-a)\cot^4(a+z) - [\cot^2(a-b)+1]\cot^3(a+z) - [\cot^2(a-b)+1]\cot(a-b)\cot^2(a+z)\\
&\quad - [\cot^2(a-b)+1]\cot^2(a-b)\cot(a+z) + \cot^4(a-b)\cot(b+z) - \cot^3(a-b).
\end{aligned}$$

D'où il suit évidemment

$$\text{(S)}\qquad \cot^m(a+z)\cot(b+z)$$
$$= \cot^m(a-b)\cot(b+z) - \cot(a-b)\cot^m(a+z)$$
$$- \operatorname{coséc}^2(a-b)\,[\cot^{m-1}(a+z) + \cot(a-b)\cot^{m-2}(a+z)$$
$$+ \cot^2(a-b)\cot^{m-3}(a+z) + \ldots + \cot^{m-2}(a-b)\cot(a+z)]$$
$$- \cot^{m-1}(a-b),$$

où nous remplaçons $\cot^2(a-b)+1$ par $\operatorname{coséc}^2(a-b)$.

25. Pour trouver maintenant la loi que suit la décomposition du produit

$$\cot^m(a+z)\cot^n(b+z),$$

nous supposons successivement $n=2$, $n=3\ldots$; et, à l'aide de la formule ci-dessus rangée comme il suit

$$\cot^m(a+z)\cot(b+z)$$
$$= \cot(b-a)\cot^m(a+z) - \cot^2(b-a)\cot^{m-1}(a+z) + \ldots.. \pm \cot^m(b-a)\cot(a+z)$$
$$- [\cot^{m-1}(a+z) - \cot(b-a)\cot^{m-2}(a+z) + \ldots \mp \cot^{m-2}(b-a)\cot(a+z)]$$
$$+ \cot^m(a-b)\cot(b+z)$$
$$- \cot^{m-1}(a-b),$$

nous obtenons

1°

$$\cot^m(a+z)\cot^2(b+z)$$
$$= \cot^2(b-a)\cot^m(a+z) - 2\cot^3(b-a)\cot^{m-1}(a+z) + \ldots.. \pm m\cot^{m+1}(b-a)\cot(a+z)$$
$$- 2[\cot(b-a)\cot^{m-1}(a+z) - 2\cot^2(b-a)\cot^{m-2}(a+z) + \ldots \mp (m-1)\cot^{m-1}(b-a)\cot(a+z)]$$
$$+ \cot^{m-2}(a+z) - 2\cot(b-a)\cot^{m-3}(a+z) + \ldots.. \pm (m-2)\cot^{m-3}(b-a)\cot(a+z)$$
$$+ \cot^m(a-b)\cot^2(b+z) - m\cot^{m+1}(a-b)\cot(b+z)$$
$$- m\cot^{m-1}(a-b)\cot(b+z)$$
$$+ m\cot^m(a-b) + (m-1)\cot^{m-2}(a-b);$$

2°

$$\cot^m(a+z)\cot^3(b+z)$$

$$= \cot^3(b-a)\cot^m(a+z) - 3\cot^4(b-a)\cot^{m-1}(a+z) + \ldots$$
$$\pm \frac{m(m+1)}{1.2}\cot^{m+2}(b-a)\cot(a+z)$$

$$-3\Big(\cot^2(b-a)\cot^{m-1}(a+z) - 3\cot^3(b-a)\cot^{m-2}(a+z) + \ldots$$
$$\mp \frac{(m-1)m}{1.2}\cot^m(b-a)\cot(a+z)\Big)$$

$$+3\Big(\cot(b-a)\cot^{m-2}(a+z) - 3\cot^2(b-a)\cot^{m-3}(a+z) + \ldots$$
$$\pm \frac{(m-2)(m-1)}{1.2}\cot^{m-2}(b-a)\cot(a+z)\Big)$$

$$-\Big(\cot^{m-3}(a+z) - 3\cot(b-a)\cot^{m-4}(a+z) + \ldots$$
$$\mp \frac{(m-3)(m-2)}{1.2}\cot^{m-4}(b-a)\cot(a+z)\Big)$$

$$+\cot^m(a-b)\cot^3(b+z) - m\cot^{m+1}(a-b)\cot^2(b+z)$$
$$+\frac{m(m+1)}{1.2}\cot^{m+2}(a-b)\cot(b+z)$$

$$-m(\cot^{m-1}(a-b)\cot^2(b+z) - m\cot^m(a-b)\cot(b+z)).$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\cot^{m-2}(a-b)\cot(b+z)$$

$$-\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\cot^{m+1}(a-b) + 2\frac{(m-1)m}{1.2}\cot^{m-1}(a-b) + \frac{(m-2)(m-1)}{1.2}\cot^{m-3}(a-b)\right);$$

et ainsi de suite.

On peut ici, sans inconvénient, assembler les facteurs qui appartiennent à une même puissance de $\cot(a+z)$ ou de $\cot(b+z)$; ce qui donne des polynômes dont les termes comportent à la fois des nombres figurés et des coefficients du binôme allant en sens inverse les uns des autres.

Dans la supposition $m >$ ou $= n$, on parvient ainsi à la formule suivante :

$$\text{(T)} \qquad \cot^m(a+z)\cot^n(b+z)$$

$$= \cot^n(b-a)\cot^m(a+z) - \left(n\cot^{n+1}(b-a) + n\cot^{n-1}(b-a)\right)\cot^{m-1}(a+z)$$

$$+ \left(\frac{n(n+1)}{1.2}\cot^{n+2}(b-a) + nn\cot^n(b-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}\cot^{n-2}(b-a)\right)\cot^{m-2}(a+z)$$

$$- \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cot^{n+3}(b-a) + n\frac{n(n+1)}{1.2}\cot^{n+1}(b-a)\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}n\cot^{n-1}(b-a) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cot^{n-3}(b-a)\right)\cot^{m-3}(a+z)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \left(\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{n+m-1}(b-a) + n\frac{(m-1)m\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{n+m-3}(b-a)\right.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(m-2)(m-1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{n+m-5}(b-a) + \ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{(m-n)(m-n+1)\ldots(m-2)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{m-n-1}(b-a)\right)\cot(a+z)$$

$$+ \cot^m(a-b)\cot^n(b+z) - \left(m\cot^{m+1}(a-b) + m\cot^{m-1}(a-b)\right)\cot^{n-1}(b+z)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \left(\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)}\cot^{m+n-1}(a-b) + m\frac{(n-1)n\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-1)}\cot^{m+n-3}(a-b)\right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{m-n+1}(a-b)\right)\cot(b+z)$$

$$+ (-1)^n\left(\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{m+n-2}(a-b) + (n-1)\frac{(m-1)m\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{m+n-4}(a-b)\right.$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{(m-2)(m-1)\ldots(m+n-4)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{m+n-6}(a-b) + \ldots$$

$$\left. + \frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m-1)}{1.2\ldots(n-1)}\cot^{m-n}(a-b)\right).$$

Exemple :

$$\left(\frac{\operatorname{tang}(d+z)}{\cot(c-z)}\right)^3 = \operatorname{tang}^3(d+z)\operatorname{tang}^3(c-z)$$

$$= -\cot^3\left(\frac{\pi}{2}+d+z\right)\cot^3\left(\frac{\pi}{2}-c+z\right).$$

Il faut donc, dans la formule (T), remplacer

$$\cot(a+z), \quad \cot(b-a), \quad \cot(b+z), \quad \cot(a-b)$$

respectivement par

$$-\operatorname{tang}(d+z), \quad -\cot(d+c), \quad \operatorname{tang}(c-z), \quad \cot(d+c),$$

et changer le signe du résultat. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\operatorname{tang}(d+z)}{\cot(c-z)}\right)^3 \\
&= -\big(\cot^3(d+c)\left(\operatorname{tang}^3(d+z)+\operatorname{tang}^3(c-z)\right) \\
&\quad - 3\left(\cot^4(d+c)+\cot^2(d+c)\right)\left(\operatorname{tang}^2(d+z)+\operatorname{tang}^2(c-z)\right) \\
&\quad + \left(6\cot^5(d+c)+9\cot^3(d+c)+3\cot(d+c)\right)\left(\operatorname{tang}(d+z)+\operatorname{tang}(c-z)\right) \\
&\quad - 6\cot^4(d+c)-6\cot^2(d+c)-1\big),
\end{aligned}$$

ce qu'on peut abréger en faisant $\cot^4(d+c)+\cot^2(d+c)=\dfrac{\cot^2(d+c)}{\sin^2(d+c)}$.

26. En opérant comme il vient d'être indiqué, on obtiendra la plus simple décomposition du produit

$$\operatorname{tang}^m(a+z)\cot^n(b-z)\operatorname{tang}^p(z-c)\ldots dz;$$

et, si le résultat doit être multiplié par une fonction de sinus et cosinus telle que nous représentons par P, on aura à intégrer des différentielles comme

$$\frac{\mathrm{P}dz}{\sin(a+z)}, \qquad \frac{\mathrm{P}dz}{\sin^m(a+z)}.$$

27. Des formules de réduction établies en tangentes ou cotangentes ne peuvent être employées qu'aux intégrales de la forme

$$\int \operatorname{tang}^m(a+z)\cos^n(b-z)\ldots dz.$$

Comme d'ailleurs elles sont d'une application moins commode que les formules de décomposition (S) et (T), nous nous abstenons de les écrire.

§ 6. *Transformations qui conduisent aux intégrations ci-dessus.*

28. Par les formules données dans ce chapitre on intégrera

1° Les fractions

$$\frac{Pdz}{\sin^m 2z \cos(a+z)\ldots} = \frac{Pdz}{2^m \sin^m z \cos^m z \cos(a+z)\ldots},$$

$$\frac{Pdz}{\cos^m 2z \cos(a+z)\ldots} = \frac{Pdz}{2^m \sin^m\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\cos^m\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\cos(a+z)\ldots};$$

2° La fraction

$$\frac{Qdz}{\cos^m(a+z)\sin(b+z)\ldots}$$

en faisant disparaître, par la substitution $z=2x$, le seul arc fractionnaire $\frac{z}{2}$ dont le sinus ou cosinus se trouve dans Q ;

3° Les fractions

$$\frac{Pdz}{\sin^m\left(i+\frac{z}{k}\right)},\quad \frac{Pdz}{\cos^m\left(i+\frac{z}{k}\right)},\quad \frac{Pdz}{\sin^m\left(i+\frac{z}{k}\right)\cos^n\left(i+\frac{z}{k}\right)},$$

en changeant z en kx ;

4° Toute fraction dont le dénominateur peut être converti en produit de sinus ou cosinus qui ne dépendent pas d'arcs multiples autres que $2z$. Tels sont les binômes

$$\sin z + \cos z = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right),$$

$$\sin 3z + \sin z = 2\sin 2z \cos z,$$

$$\cos(a+z) - \cos b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b+z)\sin\frac{1}{2}(b-a-z),$$

$$\cos(a+z) + \cos(b+z) = 2\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{a+b}{2} + z\right),$$

$$\sin^2\left(a+\frac{z}{2}\right) - \sin^2\left(b+\frac{z}{2}\right) = \sin(a-b)\sin(a+b+z),$$

. . . .

Tel est encore le polynôme

$$p\sin z + q\cos(a+z) + r\sin(b-z) + \ldots$$

car, lorsqu'on exprime $\cos(a+z)$, $\sin(b-z)$... en fonctions de sinus et cosinus de l'arc z, on obtient en assemblant

$$M\sin z \pm N\cos z = \sqrt{M^2+N^2}\left(\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2}}\sin z \pm \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2}}\cos z\right);$$

et posant ensuite

$$\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2}} = \sin\varphi,$$

on a

$$p\sin z + q\cos(a+z) + r\sin(b-z) + \ldots = \sqrt{M^2+N^2}\sin(z\pm\varphi).$$

Il est bien entendu que des produits ainsi obtenus peuvent former plusieurs facteurs du dénominateur ou s'y trouver mêlés avec des facteurs de la forme $\cos(k+z)$.

Exemples :

1°

$$\int \frac{dz}{\sin z\,(\cos z + \cos b)} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z+b}{2}\cos\frac{z-b}{2}};$$

et la formule (D) donne

$$\int \frac{dz}{\sin z\,(\cos z + \cos b)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\text{séc}^2\frac{b}{2}\, l\sin\frac{z}{2} + \text{coséc}^2\frac{b}{2}\, l\cos\frac{z}{2}\right)$$
$$- \text{coséc}^2 b\left(l\cos\frac{z+b}{2} + l\cos\frac{z-b}{2}\right) + C.$$

2°

$$\int \frac{\sin z\, dz}{\sin z + 3\cos(a-z) - 5\cos z} = \int \frac{\sin z\, dz}{(1+3\sin a)\sin z - (5-3\cos a)\cos z}.$$

On a donc ici

$$M = 1 + 3\sin a, \qquad N = 5 - 3\cos a,$$
$$M^2 + N^2 = 35 + 6\sin a - 30\cos a;$$

et la fraction à intégrer prend la forme

$$\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2}}\int \frac{\sin z\, dz}{\sin(z-\varphi)}.$$

En rapportant son numérateur à l'arc $z-\varphi$, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2}}\int \frac{\sin z\, dz}{\sin(z-\varphi)} = \frac{1}{M^2+N^2}\left(M\int dz + N\int \frac{\cos(z-\varphi)dz}{\sin(z-\varphi)}\right)$$
$$= \frac{1}{M^2+N^2}\,[Mz + N l\sin(z-\varphi)] + C;$$

et comme

$$l \sin(z - \varphi) = l \frac{M \sin z - N \cos z}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$
$$= l(M \sin z - N \cos z) - l\sqrt{M^2 + N^2},$$

on peut comprendre

$$\frac{1}{M^2 + N^2}\, l\sqrt{M^2 + N^2}$$

dans la constante arbitraire C. On aura donc en définitive

$$\int \frac{\sin z dz}{\sin z + 3\cos(a - z) - 5\cos z} = \frac{1}{35 + 6\sin a - 30\cos a}\Big((1 + 3\sin a)z$$
$$+ (5 - 3\cos a)\, l(\sin z + 3\cos(a - z) - 5\cos z)\Big) + C.$$

29. Les formules établies dans ce chapitre conduisent aussi à la détermination de l'intégrale

$$\int \frac{Q dz}{\sin^\alpha(p + mz)\cos^\beta(q + nz)\ldots},$$

où nous représentons par Q une fonction entière de sinus et cosinus qui peuvent dépendre de différentes fractions de z. En effet, par une substitution convenable, on ferait disparaître ces fractions. Et quant aux sinus et cosinus qui se trouvent dans le dénominateur de cette intégrale, on peut les écrire ainsi

$$\sin m\left(\frac{p}{m} + z\right),\quad \cos n\left(\frac{q}{n} + z\right), \ldots;$$

et l'on sait que, lorsque m est un nombre entier, $\sin mx$ et $\cos mx$ peuvent être exprimés au moyen de produits tels que

$$\sin x \sin(a+x)\sin(b+x)\ldots.$$

formés de m facteurs. Mais, comme les m facteurs offrent alors des relations particulières en vertu desquelles on obtient des solutions que ne donnerait pas une simple application des formules ci-dessus, nous réservons l'intégration de ces sortes de fractions pour en faire l'objet du chapitre suivant.

ERRATA.

Pages.	Lignes.			
6,	14,	$\frac{1}{p}\sin(a \pm pz)pdz = \pm\frac{\cos(a \pm pz)}{p}$	*lisez*	$\frac{1}{p}\int\sin(a \pm pz)pdz = \mp\frac{\cos(a \pm pz)}{p}$
ibid.,	15,	$\frac{1}{p}\cos(a \pm pz)pdz = \mp\frac{\sin(a \pm pz)}{p}$	*lisez*	$\frac{1}{p}\int\cos(a \pm pz)pdz = \pm\frac{\sin(a \pm pz)}{p}$
10,	13,	$\frac{adz}{\cos z +}\frac{b\sin^\alpha zdz}{\cos z}$	*lisez*	$\frac{adz}{\cos z} + \frac{b\sin^\alpha zdz}{\cos z}$
11,	4,	$\int\frac{dz}{2\sin\frac{z}{z}\cos\frac{z}{z}}$	*lisez*	$\int\frac{dz}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}$
18,	7,	$\frac{m(m+1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}z$	*lisez*	$\frac{m(m-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}z$
23,	6,	$\frac{Pdz}{\sin^m(a \pm z)}, \frac{Pdz}{\cos^m(a \pm z)}$	*lisez*	$\frac{Pdz}{\sin(a \pm z)}, \frac{Pdz}{\cos(a \pm z)}, \frac{Pdz}{\sin(a \pm z)\cos(a \pm z)},$
48,	11,	$\frac{(k-1)k\ldots(k-i-1)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-3}(b-a)\sin^2(a+z)}$	*lisez*	$\frac{(k-1)k\ldots(k+i-1)}{1.2\ldots(i+1)\sin^{m-3}(b-a)\sin^2(a+z)}$
59,	12,	$\frac{1}{\sin^2(b+g)}\int\frac{dz}{\sin(g-z)\sin(b+}$	*lisez*	$\frac{1}{\sin^2(b+g)}\int\frac{dz}{\sin(g-z)\sin(b+z)}.$